

## Lösungsvorschläge zur Klausur

### Lineare Algebra, Herbst 2010

#### I.1

Es seien  $n$  eine natürliche Zahl,  $M = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$  und  $S_n$  die Gruppe der Permutationen der Menge  $M$ .

Zeigen Sie:

- Für jedes  $a \in M$  ist  $H_a := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(a) = a\}$  eine Untergruppe von  $S_n$ .
- Für alle  $a \in M$  und  $b, c \in M \setminus \{a\}$  gibt es ein  $\tau \in H_a$  mit  $\tau(b) = c$ .
- Wenn  $\tau \in S_n$  eine Permutation mit  $\tau(1) = a$  ist, dann gilt

$$H_a = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \sigma \in H_1\}.$$

*Lösung:*

a) Wir benutzen das Untergruppenkriterium. Es ist  $H_a \neq \emptyset$ , denn  $\text{id}_M(a) = a$ , also  $\text{id}_M \in H_a$ . Ist  $\sigma \in H_a$ , dann gilt  $a = \text{id}_M(a) = \sigma^{-1}\sigma(a) = \sigma^{-1}(a)$ . Also ist auch  $\sigma^{-1} \in H_a$ . Sind  $\sigma, \tau \in H_a$ , dann gilt  $\sigma\tau(a) = \sigma(a) = a$ , also  $\sigma\tau \in H_a$ . Mit dem Untergruppenkriterium folgt, dass  $H_a$  eine Untergruppe von  $S_n$  ist.

b) Es sei  $\tau : M \rightarrow M$  gegeben durch

$$m \mapsto \begin{cases} m, & \text{falls } m \neq b, m \neq c, \\ c, & \text{falls } m = b, \\ b, & \text{falls } m = c. \end{cases}$$

Dann ist  $\tau^2 = \text{id}_M$ , also  $\tau$  bijektiv und damit in  $S_n$ .  $\tau$  ist sogar in  $H_a$ , denn  $\tau(a) = a$  wegen  $b \neq a \neq c$ .

c) Sei  $\tau \in S_n$  mit  $\tau(1) = a$  (also  $\tau^{-1}(a) = 1$ ) gegeben. Es sei  $\tilde{\sigma} \in H_a$  beliebig. Dann ist

$$\tilde{\sigma} = \tau\tau^{-1}\tilde{\sigma}\tau\tau^{-1}$$

und

$$\tau^{-1}\tilde{\sigma}\tau(1) = \tau^{-1}\tilde{\sigma}(a) = \tau^{-1}(a) = 1.$$

Damit ist das Element  $\sigma = \tau^{-1}\tilde{\sigma}\tau$  in  $H_1$ . Außerdem gilt  $\tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$  und somit folgt die Inklusion von links nach rechts. Für alle  $\sigma \in H_1$  gilt umgekehrt  $\tau\sigma\tau^{-1}(a) = \tau\sigma(1) = \tau(1) = a$  und damit folgt die Inklusion von rechts nach links.

## I.2

Es seien  $K$  ein Körper,  $V^1$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U_1, U_2, U_3$  Untervektorräume von  $V$ .  
Zeigen Sie:

a)  $V = U_1 \cup U_2 \iff V = U_1$  oder  $V = U_2$ .

b)  $U_1 \subseteq U_3 \iff U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$ .

*Lösung:*

a) “ $\Leftarrow$ ”: Ist  $V = U_1$  oder  $V = U_2$ , so ist  $U_1 \cup U_2 \subseteq V \subseteq U_1 \cup U_2$ , also  $V = U_1 \cup U_2$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $V = U_1 \cup U_2$ .

Wir nehmen  $V \neq U_1$  an (sonst wären wir fertig) und zeigen unter dieser Annahme, dass  $V = U_2$  gelten muss.

Aufgrund der Annahme (und da  $U_1 \subset V$  gilt) gibt es ein  $a \in V \setminus U_1$ . Nach Voraussetzung gilt

$$a \in V \setminus U_1 = (U_1 \cup U_2) \setminus U_1 = U_2 \setminus (U_1 \cap U_2) \subseteq U_2.$$

Sei  $b \in V$  beliebig. Ist  $b \in U_1$ , so ist  $a + b \notin U_1$ , da andernfalls aus  $a + b \in U_1$  und  $b \in U_1$  auch  $a \in U_1$  folgt, was ausgeschlossen ist. Dann gilt aber  $a + b \in U_2$  nach Voraussetzung. Wegen  $a \in U_2$  folgt nun  $b \in U_2$ . Ist dagegen  $b \notin U_1$ , so erhält man  $b \in U_2$  nach Voraussetzung. In jedem Fall ist also  $b \in U_2$ . Da  $b \in V$  beliebig war, erhält man  $V \subseteq U_2$ , d.h.  $V = U_2$ .

Insgesamt ist also  $V = U_1$  oder  $V = U_2$ .

b) “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $U_1 \subseteq U_3$ . Dann gilt

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq U_1 + U_2 \quad \text{und} \quad U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq U_3 + U_3 = U_3.$$

Dies zeigt

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3.$$

Ist  $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$ , so ist  $x = u_1 + u_2$  mit  $u_1 \in U_1$  und  $u_2 \in U_2$ . Wegen  $u_1 + u_2 = x \in U_3$  erhält man  $u_2 = x - u_1 \in U_3 + U_1 \subseteq U_3 + U_3 = U_3$ , also  $x = u_1 + u_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$ .

Dies ergibt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

Insgesamt folgt nun die Gleichheit.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei nun

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3.$$

Wegen

$$U_1 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_3$$

folgt unmittelbar  $U_1 \subseteq U_3$ .

---

<sup>1</sup>Auf der Klausur stand hier  $B$ , was in den Hörsälen korrigiert wurde.

### I.3

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} ax & + & bz = 2 \\ ax + ay + 4z & = & 4 \\ & ay + 2z & = b \end{array}$$

mit den reellen Parametern  $a$  und  $b$ .

Geben Sie die reelle Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  an.

*Lösung:*

Zu lösen ist  $Av = c$  mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

sowie  $c = (2 \ 4 \ b)^\top$  und  $v = (x \ y \ z)^\top$ . Die Lösungsmenge bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}$ .

**1.Fall  $a = 0$ :** Die erweiterte Matrix ist hier

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{array} \right).$$

Für  $b \neq 2$  ist daher  $\mathcal{L} = \emptyset$ . Für  $b = 2$  gilt

$$\mathcal{L} = \left\{ \left( \begin{array}{c} s \\ t \\ 1 \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**2.Fall  $a \neq 0$ :** Hier ist die erweiterte Matrix

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array} \right).$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Zeile und anschließende Subtraktion der zweiten von der dritten Zeile führt auf:

$$\tilde{A}' := \left( \begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array} \right).$$

Für  $b \neq 2$  ist  $A$  invertierbar und es gibt nur eine Lösung:  $\mathcal{L} = \left\{ \left( \frac{2-b}{a} \ \frac{b-2}{a} \ 1 \right)^\top \right\}$ .  
Für  $b = 2$  ist  $z$  beliebig und es folgt

$$\mathcal{L} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 2/a \\ 2/a \\ 0 \end{array} \right) + s \left( \begin{array}{c} 2/a \\ 2/a \\ -1 \end{array} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

#### I.4

Im Vektorraum  $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{Grad}(f) \leq 4\}$  sei der Untervektorraum

$$U = \{f \in V \mid f(1) = f(-1) = 0\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie eine Basis  $B$  des Vektorraums  $U$  und stellen Sie die Linearformen

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto -f(0)$$

und

$$\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f'(1)$$

als Linearkombinationen der zu  $B$  dualen Basis dar.

*Lösung:*

Ein Polynom  $f$  liegt genau dann in  $U$ , wenn es von  $(X+1)(X-1) = (X^2-1)$  geteilt wird und sein Grad nicht größer als 4 ist, also genau dann, wenn  $f = (X^2-1)g$  mit  $\text{Grad}(g) \leq 2$ .

Die Abbildung  $g \mapsto (X^2-1) \cdot g$  ist damit ein Vektorraumisomorphismus vom Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  nach  $U$ . Das Bild der Basis  $\{1, X, X^2\}$  des erstgenannten Vektorraums ist daher eine Basis  $B := \{b_1, b_2, b_3\}$  von  $U$ . Es gilt

$$b_1 := X^2 - 1, \quad b_2 := (X^2 - 1)X, \quad b_3 := (X^2 - 1)X^2.$$

Sei nun  $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$  die zu  $B$  duale Basis von  $U^*$ . Wegen

$$\Phi(b_1) = 1, \quad \Phi(b_2) = 0, \quad \Phi(b_3) = 0,$$

erfüllt  $\Phi$  genau die definierende Gleichung von  $b_1^*$ :

$$\Phi(b_i) = \delta_{1i}, \quad \text{und damit} \quad \Phi = b_1^*.$$

Weiter gilt

$$b'_1 = 2X, \quad b'_2 = 3X^2 - 1, \quad b'_3 = 4X^3 - 2X,$$

folglich

$$\Psi(b_1) = 2, \quad \Psi(b_2) = 2, \quad \Psi(b_3) = 2$$

und damit  $\Psi = 2(b_1^* + b_2^* + b_3^*)$ .

## I.5

Gegeben seien die zwei reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass  $A$  und  $B$  dasselbe charakteristische Polynom haben.
- Welche der Matrizen  $A$  und  $B$  sind diagonalisierbar?
- Bestimmen Sie für eine der Matrizen  $A$ ,  $B$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ , die aus Eigenvektoren besteht.

*Lösung:*

a) Die charakteristischen Polynome sind gleich:

$$\begin{aligned} \text{CP}_A(X) &= \det(XI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 2 & X-2 & -1 \\ 2 & -1 & X-2 \end{pmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)^2 - 2 + 2 + 2(X-2) - 2(X-2) - (X-1) \\ &= (X-1)((X-2)^2 - 1) = (X-1)^2(X-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CP}_B(X) &= \det(XI_3 - B) = \det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 2 & X-1 & -2 \\ 2 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \\ &= (X-1)^2(X-3) \end{aligned}$$

Das sieht man am schnellsten durch Entwickeln erst nach der ersten Zeile und dann nach der ersten Spalte.

b) Beide Matrizen haben die Eigenwerte 1 und 3. Die algebraische Vielfachheit von 1 ist jeweils 2, die von 3 ist 1.

Matrix  $A$ : Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist der Kern von

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2, und daher ist  $E_1$  eindimensional. Die geometrische und algebraische Vielfachheit sind demnach unterschiedlich, und  $A$  ist nicht diagonalisierbar.

Matrix  $B$ : Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$\text{Kern}(B - I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist

$$\text{Kern}(B - 3I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Da hier die algebraischen und die geometrischen Vielfachheiten jeweils übereinstimmen, ist  $B$  diagonalisierbar.

c) Das funktioniert nur für die diagonalisierbare der beiden Matrizen, also für  $B$ .

Aufgrund der Rechnungen in b) ergibt sich eine mögliche Basis aus Eigenvektoren für  $B$  als

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## I.6

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n$  die reelle  $n \times n$ -Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } |i - j| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei  $d_n := \det(A_n)$ .

- Finden Sie eine Rekursionsformel für  $d_n$ .
- Berechnen Sie  $d_n$  für  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .
- Verifizieren Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$d_{n+6} = d_n.$$

*Lösung:*

a) Auf der Diagonalen von  $A_n$  und auf der oberen und unteren Nebendiagonalen sind die Einträge 1, alle sonstigen Einträge sind 0. Also gilt

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $n \geq 3$ . Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$d_n = \det(A_n) = 1 \cdot \det(A_{n-1}) - 1 \cdot \det(C), \quad (*)$$

wobei  $A_{n-1}$  aus  $A_n$  durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte hervorgeht, und  $C$  aus  $A_n$  durch Streichen der ersten Spalte und zweiten Zeile hervorgeht und somit folgende Blockform hat:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_1 & A_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt  $\det(C) = 1 \cdot \det(A_{n-2})$ . Einsetzen in (\*) ergibt nun die Rekursionsformel

$$d_n = d_{n-1} - d_{n-2}. \quad (**)$$

b) Um die Rekursionsformel benutzen zu können, benötigt man die Werte

$$d_1 = \det(A_1) = 1 \quad \text{und} \quad d_2 = \det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit der Rekursionsformel aus Teil a) berechnen wir

$$\begin{aligned} d_3 &= d_2 - d_1 = 0 - 1 = -1, \\ d_4 &= d_3 - d_2 = -1 - 0 = -1, \\ d_5 &= d_4 - d_3 = -1 - (-1) = 0, \\ d_6 &= d_5 - d_4 = 0 - (-1) = 1, \\ d_7 &= d_6 - d_5 = 1 - 0 = 1, \\ d_8 &= d_7 - d_6 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

c) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über  $n$ :

*Induktionsanfang*  $n = 1$  und  $n = 2$ :

Nach Teil (b) ist  $d_1 = 1 = d_7 = d_{1+6}$  und  $d_2 = 0 = d_8 = d_{2+6}$ .

*Induktionsvoraussetzung*:

Für  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , gilt  $d_n = d_{n+6}$  und  $d_{n-1} = d_{n-1+6}$ .

*Induktionsschluss*  $n \rightsquigarrow n + 1$ :

Wir verwenden  $(**)$  aus Teil (a) und die Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\stackrel{(**)}{=} d_{n+1-1} - d_{n+1-2} = d_n - d_{n-1} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} d_{n+6} - d_{n-1+6} = d_{n+6} - d_{(n+6)-1} \\ &\stackrel{(**)}{=} d_{(n+1)+6}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung für  $n + 1$ .

**Alternativ** kann man auch so rechnen:

Für alle  $n$  gilt unter zweimaliger Verwendung der Rekursionsformel (erst für  $n + 3$ , dann für  $n + 2$ ):

$$d_{n+3} = d_{n+2} - d_{n+1} = d_{n+1} - d_n - d_{n+1} = -d_n,$$

und damit

$$d_{n+6} = -d_{n+3} = -(-d_n) = d_n.$$



## II.1

Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gegeben und  $M \in \mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$  die Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit  $J$  bezeichnen wir die Jordansche Normalform von  $M$ .

- Welche Eigenwerte hat  $M$ ?
- Wie lang sind die längsten Jordankästchen in  $J$ ?
- Bestimmen Sie  $J$  in Abhängigkeit vom Rang von  $A$ .
- Bestimmen Sie für  $n = 2$  und  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  eine Basiswechselmatrix  $S \in \text{GL}_4(\mathbb{C})$  mit  $S^{-1}MS = J$ .

*Lösung:*

a) Die Eigenwerte von  $M$  sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms der strikten unteren Dreiecksmatrix  $M$ :

$$\text{CP}_M(X) = \det(XI_{2n} - M) = X^{2n}.$$

Also hat  $M$  nur den Eigenwert 0.

b) Da 0 der einzige Eigenwert ist, ist die Länge des längstmöglichen Jordankästchens durch das kleinste  $k \in \mathbb{N}$  gegeben, sodass  $M^k = 0$ . Für  $A \neq 0$  ist das  $k = 2$  und für  $A = 0$  ist das  $k = 1$ .

c) Die Anzahl der Kästchen ist die Dimension des Eigenraums  $E_0$  zum hier einzigen Eigenwert 0. Der Dimensionssatz besagt:

$$\dim(E_0) = \dim(\text{Kern}(M)) = 2n - \text{Rang}(M) = 2n - \text{Rang}(A).$$

Die Summe der Längen der Kästchen ist  $2n$ . Nach Teil b) haben die längsten Kästchen Länge 2 und somit können wir  $J$  bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmen: Die Anzahl der Kästchen von  $J$  vom Typ  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (d.h. Länge 2) ist gleich  $\text{Rang}(A)$  und vom Typ  $(0)$  (d.h. Länge 1) gleich  $2n - 2\text{Rang}(A)$ .

d) Für  $n = 2$  und  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist der Eigenraum  $E_0$  zum Eigenwert 0 wegen  $M^2 = 0$  und der Dimensionsformel gleich dem Bild von  $M$ . Dieses wird von den ersten beiden Spalten von  $M$  erzeugt, wobei die erste Spalte das Bild des ersten Standardbasisvektors ist, und die zweite das des zweiten Standardbasisvektors.

Man erhält so

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als mögliche Basiswechselmatrix.

## II.2

Es sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Zeigen Sie:

a) Durch

$$P(v, w) := \sum_{i=1}^n (b_i^\top \cdot v) \cdot (b_i^\top \cdot w)$$

wird ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  definiert.

b) Wenn  $B$  eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts ist, dann ist  $P$  das Standardskalarprodukt.

*Lösung:*

a) Da die Multiplikation in  $\mathbb{R}$  kommutativ ist, ist  $P$  symmetrisch:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : P(v, w) = P(w, v).$$

Für die Bilinearität langt es daher, Linearität im ersten Argument nachzurechnen. Es seien also  $w \in \mathbb{R}^n$  fest und  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  sowie  $a \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt aufgrund der Distributiv- und Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} P(v_1 + av_2, w) &= \sum_{i=1}^n (b_i^\top \cdot (v_1 + av_2)) \cdot (b_i^\top \cdot w) \\ &= \sum_{i=1}^n [(b_i^\top \cdot v_1) + (b_i^\top \cdot av_2)] \cdot (b_i^\top \cdot w) \\ &= \sum_{i=1}^n [(b_i^\top \cdot v_1) \cdot (b_i^\top \cdot w)] + [a(b_i^\top \cdot v_2) \cdot (b_i^\top \cdot w)] \\ &= P(v_1, w) + aP(v_2, w). \end{aligned}$$

Noch zu zeigen ist also, dass  $P$  positiv definit ist. Dazu sei  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ .

Wegen  $v^\top v > 0$  gibt es mindestens ein  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  mit  $b_{i_0}^\top \cdot v \neq 0$ , da  $v$  eine Linearkombination der  $b_i$  ist.

Da alle Summanden in  $P(v, v)$  Quadrate in  $\mathbb{R}$  und damit nicht negativ sind, impliziert das

$$P(v, v) = \sum_{i=1}^n (b_i^\top \cdot v) \cdot (b_i^\top \cdot v) \geq (b_{i_0}^\top \cdot v) \cdot (b_{i_0}^\top \cdot v) > 0.$$

b) Die Fundamentalmatrix von  $P$  bezüglich  $B$  ist die Matrix mit den Einträgen

$$P(b_k, b_l), \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Diese berechnen sich zu

$$P(b_k, b_l) = \sum_{i=1}^n (b_i^\top \cdot b_k) \cdot (b_i^\top \cdot b_l).$$

Da  $B$  hier eine Orthonormalbasis ist, sind alle Summanden 0, außer für  $i = k = l$ . In diesem Fall ist der Summand gleich  $1 = 1 \cdot 1$ . Es ergibt sich, dass die Fundamentalmatrix die Einheitsmatrix ist, aber das ist auch die Fundamentalmatrix des Standardskalarprodukts bezüglich  $B$ .

Daher stimmen diese zwei Skalarprodukte überein.

### II.3

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Es gibt eine symmetrische Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit  $B^2 = A$ .

*Hinweis:* Es wird nicht verlangt,  $B$  explizit anzugeben.

*Lösung:*

Da  $A$  symmetrisch ist, ist  $A$  nach dem Spektralsatz orthogonal diagonalisierbar. Es existiert daher eine orthogonale Matrix  $T \in O(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so dass

$$T^\top A T = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{:=D}.$$

NB: Wegen  $T \in O(3)$  gilt  $T^\top = T^{-1}$ .

Mit dem Hurwitz-Kriterium sehen wir ein, dass  $A$  positiv definit ist:

$$2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det A = 4 > 0.$$

Folglich sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $A$  positiv, und es gilt  $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}$  für  $i = 1, 2, 3$ .  
Setze

$$S := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$A = T T^\top A T T^\top = T D T^\top = T S^2 T^\top = \underbrace{T S T^\top}_{:=B} T S T^\top.$$

Hier haben wir benutzt, dass  $T^\top T$  die Einheitsmatrix ist,  $T$  ist ja orthogonal.

Dann ist  $B^2 = A$  wie gewünscht und  $B$  ist symmetrisch, da  $S$  diagonal ist:

$$B^\top = (T S T^\top)^\top = (T^\top)^\top S^\top T^\top = T S T^\top = B.$$

## II.4

Es sei  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet und

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die orthogonale Spiegelung an der von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Ebene durch den Ursprung.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ .

b) Berechnen Sie das Bild von  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  unter  $\Phi$ .

*Lösung:*

a) Sei  $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$  ein Normalenvektor der von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Ebene  $E$  durch den Ursprung. Dann ist die Spiegelung  $\Phi$  beschrieben durch

$$\Phi(x) = x - 2 \frac{\langle x, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Einen solchen Vektor  $n$  findet man durch Lösen des Linearen Gleichungssystems  $a^\top n = b^\top n = 0$ . Hier bietet sich

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

an. Es gilt  $\langle n, n \rangle = 1 + 4 + 9 = 14$ .

Durch Einsetzen von  $n$  in die obige Gleichung ergibt sich für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ :

$$\Phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2}{14} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \end{pmatrix},$$

woraus sich die Abbildungsmatrix  $A_\Phi$  von  $\Phi$  ablesen lässt:

$$A_\Phi = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Als Bild von  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  unter  $\Phi$  ergibt sich der Vektor

$$\Phi(v) = A_\Phi \cdot v = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## II.5

Es seien  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und  $\Phi \in \text{End}(V)$  ein Endomorphismus, sodass  $\Phi^* = 2\Phi^2 - \Phi$  die zu  $\Phi$  adjungierte Abbildung ist.

- Zeigen Sie, dass  $\Phi$  normal ist.
- Welche Zahlen können als Eigenwerte von  $\Phi$  auftreten?
- Zeigen Sie, dass  $\Phi$  eine orthogonale Projektion ist.

*Lösung:*

a) Es gilt

$$\Phi^* \circ \Phi = (2\Phi^2 - \Phi) \circ \Phi = 2\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi \circ (2\Phi^2 - \Phi) = \Phi \circ \Phi^*.$$

Nach Definition bedeutet das, dass  $\Phi$  normal ist.

b) Da  $\Phi$  normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis  $B$  aus Eigenvektoren von  $\Phi$ . Die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich  $B$  ist eine Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , und die  $\lambda_k$  sind die Eigenwerte von  $\Phi$ . Die Abbildungsmatrix von  $\Phi^*$  bezüglich  $B$  ist  $A^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$ , da  $B$  eine Orthonormalbasis ist. Hier muss auch die Gleichheit

$$A^* = 2A^2 - A$$

gelten, und das bedeutet für den Eigenwert  $\lambda_k = x + yi$ :

$$x - yi = 2(x + yi)^2 - (x + yi) = 2x^2 - 2y^2 - x + (2xy - y)i.$$

Der Vergleich der Imaginärteile zeigt  $xy = 0$ , also  $x = 0$  oder  $y = 0$ .

Im Fall  $x = 0$  zeigt der Vergleich der Realteile, dass auch  $y = 0$  gilt. Also ist auf jeden Fall  $\lambda_k$  reell und erfüllt die Gleichung

$$\lambda_k = 2\lambda_k^2 - \lambda_k, \quad \text{also} \quad \lambda_k^2 = \lambda_k.$$

Daher sind die einzig möglichen Eigenwerte 0 und 1.

c) Es ist

$$V = \text{Eig}(\Phi, 0) \perp \text{Eig}(\Phi, 1),$$

und wenn  $v = v_0 + v_1$  eine dazu passende Zerlegung von  $v \in V$  ist, dann gilt  $\Phi(v) = v_1$ .

Also ist  $\Phi$  die orthogonale Projektion auf  $\text{Eig}(\Phi, 1)$ .

## II.6

Auf dem Raum  $\mathbb{R}^3$  sei  $\|\cdot\|$  die vom Standardskalarprodukt herkommende Längenfunktion.

Durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sei die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av + b,$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von  $\Phi$ .

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|\Phi(v) + b\| = \|v + b\|\}$$

eine Quadrik ist, und ermitteln Sie deren affine Normalform.

*Lösung:*

a) Die Fixpunkte von  $\Phi$  sind die Lösungen  $v \in \mathbb{R}^3$  der Gleichung  $\Phi(v) = v$ , also die Lösungen von

$$Av - v = -b,$$

oder auch die Lösungen des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $-b$  ein Fixpunkt. Die Menge aller Fixpunkte ist daher die affine Gerade

$$-b + \text{Kern}(A - I_3) = -b + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Nun sei  $v = (x \ y \ z)^\top$ . Da Beträge alle nicht negativ sind, ist die Gleichung  $\|\Phi(v) + b\| = \|v + b\|$  äquivalent zu  $\|\Phi(v) + b\|^2 = \|v + b\|^2$  und heißt dann konkreter

$$(x + 2z)^2 + (2y + 4z + 2)^2 + z^2 = x^2 + (y + 1)^2 + z^2.$$

Ersetzt man hier  $y$  durch  $y = w - 1$ , so wird daraus

$$(x + 2z)^2 + (2w - 2 + 4z + 2)^2 + z^2 = x^2 + (w - 1 + 1)^2 + z^2,$$

also

$$(x + 2z)^2 + (2w + 4z)^2 + z^2 = x^2 + w^2 + z^2.$$

Auflösen der Klammern führt auf

$$x^2 + 4xz + 4z^2 + 4w^2 + 16wz + 16z^2 + z^2 = x^2 + w^2 + z^2.$$

Abziehen der rechten Seite von der linken und Zusammenfassen gleicher Terme führt auf

$$4xz + 20z^2 + 3w^2 + 16wz = 0.$$

Dies lässt sich schreiben als

$$v^\top Mv = 0,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 20 \end{pmatrix}.$$

$M$  ist wegen  $\det(M) = -12$  regulär. Da der erste Hauptminor 0 ist, kann  $M$  nicht definit sein, ist also indefinit. Daher ist die so definierte Quadrik ein Kegel. Die Normalform lautet

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 0.$$