Karlsruher Institut für Technologie

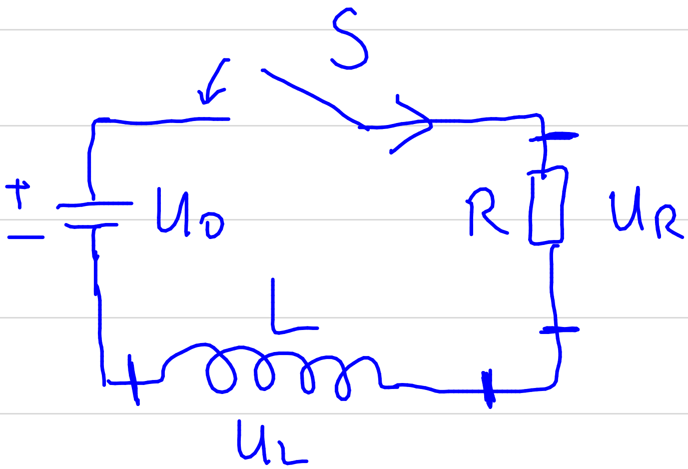
Klassische Physik 2 Elektrodynamik SS2013

Johannes Blümer

V15 27. Juni

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Energie des Magnetfeldes



Stromkreis mit Spule und Widerstand

Spule speichert „magnetische Energie"

vgl. Kondensator speichert „elektr. Energie"

$t = 0$; schließe S $\rightarrow$ Anfangsstrom I

$U_R = -I \cdot R$, $U_L = -L \cdot \dot{I}$

$\longrightarrow \quad U_0 - IR - L \cdot \dot{I} = 0$

Maschenregel.

$$\underbrace{U_0 I}_{P_{Batt.}} = \underbrace{I^2 R}_{P_R} + \underbrace{L I \dot{I}}_{P_L} \Rightarrow \text{Leistungsbetrachtung}$$

P_L = Änderung der magn. Energie in der Spule pro Zeit, $\frac{dE_{mag.}}{dt}$

$$\frac{dE_{mag.}}{\cancel{dt}} = L \cdot I \cdot \frac{dI}{\cancel{dt}} \Rightarrow dE_{mag.} = L \cdot I \cdot dI$$

Integration von $t = 0$ bis $t = \infty$

$\hat{=}$ $I = 0$ $\quad I_{End} = I$

$$\hookrightarrow \boxed{E_{mag.} = \frac{1}{2} L \cdot I^2}, \quad I_{End} = \frac{U_0}{R}$$

(*) In der Spule gespeicherte Energie

Magnetfeld der Spule: $B_{sp.} = \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I$

Induktivität -"- : $L_{sp.} = \mu_0 \left(\frac{n}{l}\right)^2 \cdot l \cdot A$

$I = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot n}$ und $L_{sp.}$ in (*) einsetzen

$$E_{mag.} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\mu_0} \left(\frac{n}{\cancel{l}}\right)^2 \cdot l \cdot A \cdot \frac{B^2 \cdot \cancel{l^2}}{\mu_0^2 \cdot \cancel{n^2}} = \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\text{Energiedichte des magn. Feldes } w_{mag.}} \cdot \underbrace{l \cdot A}_{\text{Vol.}}$$

$\hookrightarrow$ $$\boxed{w_{mag.} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

vgl. mit elektr. Feld $\boxed{w_{el.} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

Beispiel:

- Energiedichte des Erdmagnetfeldes:

$$w_{mag.} = \frac{(10^{-4}\,T)^2}{2\cdot(4\pi\cdot 10^{-7}\,N/A^2)} \simeq \frac{1}{25}\cdot 10^{-1}\,\frac{J}{m^3}$$

$$\simeq 0{,}004\ J/m^3$$

- Energiedichte im Teilchenbeschleun. LHC

$$B = 8{,}3\,T \Rightarrow w_{mag.} = \frac{69}{8\pi\cdot 10^{-7}}\cdot\frac{J}{m^3}$$

$$\simeq 2{,}7\cdot 10^{7}\ J/m^3$$

$$\text{Vol.} \simeq 27\,km\ \text{Umfang}\cdot(0{,}1\,m)^2$$

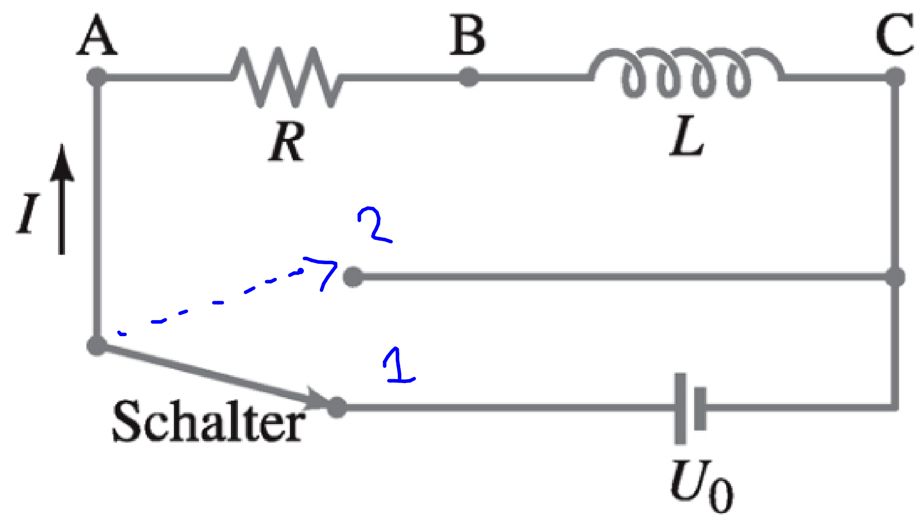
$$\simeq 270\ m^3$$

$$\hookrightarrow E^{LHC}_{mag.} = w\cdot V = 7\,GJ$$

[10 GJ in alle Magnete $\hat{=}$ A380 @ 700 km/h

$\hat{=}$ 12t Cu schmelzen]

RL-Stromkreis



$$U_{ind.} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

(a) Einschalten des Stromes (1):

$$U_0 - L\frac{dI}{dt} = I \cdot R$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I - \frac{U_0}{L} = 0$$

Ansatz: $I(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + C_2$

Einsetzen + Anfangsbeding. $I(t=0) = 0$

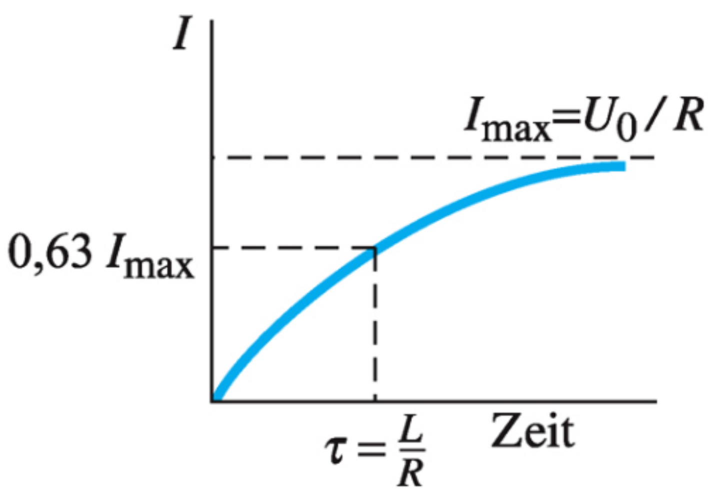
$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)}$$

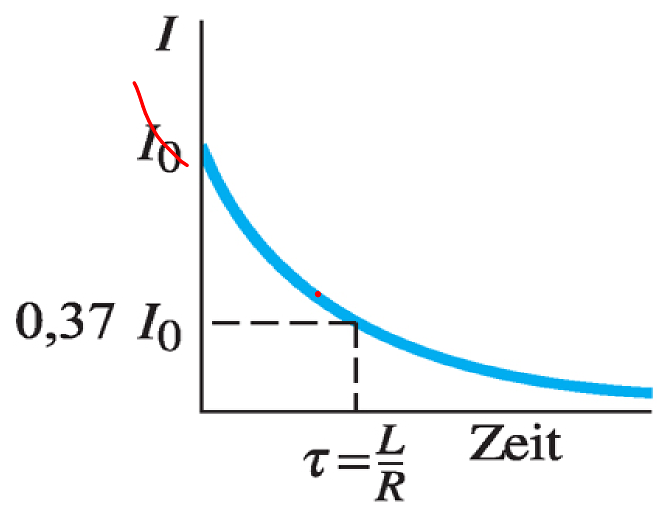
$$I(t) \sim e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Zeit-konst.

(b) Ausschalten des Stromes (2):

$$-L\cdot\frac{dI}{dt} = R\cdot I \quad\Rightarrow\quad \boxed{I(t) = I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}}$$





Erinn:
Kondensator-Aufladung

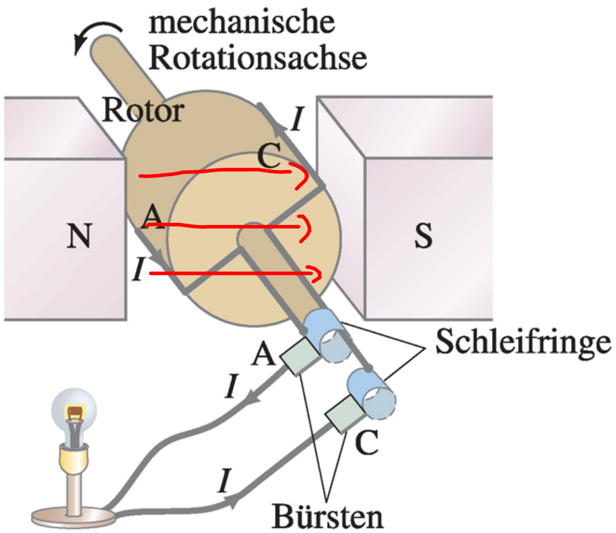
$$I(t) = I_0\cdot e^{-t/RC}$$

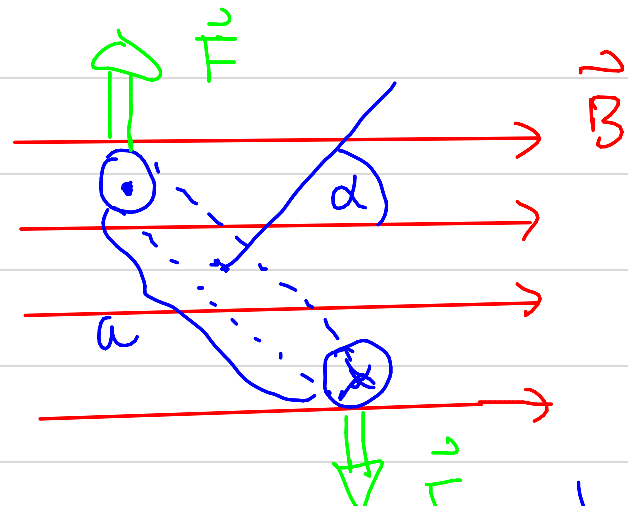
$$\tau = R\cdot C$$

Wechselstrom

entscheidender Vorteil: Spannung und Strom leicht transformierbar,
Verringerung von „Transportverlusten"

Wechselstromerzeugung





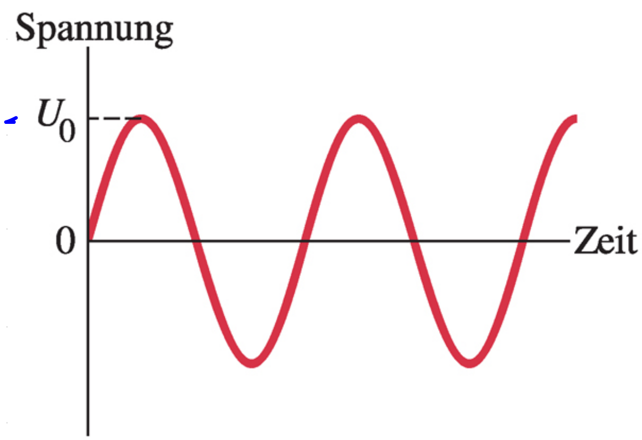
$\vec F \perp \vec I, \vec B$

Schleifenlänge l, N Windungen.

$$\vec F = I \cdot \vec l \times \vec B$$

$$F = N \cdot I \cdot l \cdot B \quad , \vec F \perp \vec B$$

Induzierte



↳ sinusförmige wenn der Antrieb „gleichmässig" ist.

↳ Drehmoment: $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$

$$M = F \cdot a \cdot \sin\alpha$$

$$= \underbrace{N I \boxed{l a}}_{\text{magn. Moment}} \cdot B \cdot \sin\alpha$$

Fläche der Schleife

M, F hängen von α ab

$$\alpha \rightarrow \alpha(t)$$

↳ $U(t)$, $I(t)$ Momentanwerte!

gleichmäßige Rotation: $\alpha = \omega t$, ω = konstant

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, T = Umlaufzeit

$$\underbrace{\alpha = \underline{\omega} t = 2\pi \cdot \underline{f} \cdot t}\,,\quad \underbrace{\alpha = 0 \text{ für } t = 0}$$

Kreisfreq. Freq.

Drehwinkel der Spule zur Richtung des B-Feldes ergibt die „Phase" der Spannung (des Stromes) relativ zur Zeitrechnung.

Spannung $= U(t) = U_0 \sin \omega t = U_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$

DE: 325 V, $f = 50$ Hz

aber im Alltag "230V"

Allg. gehört dazu ein induzierter Strom:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

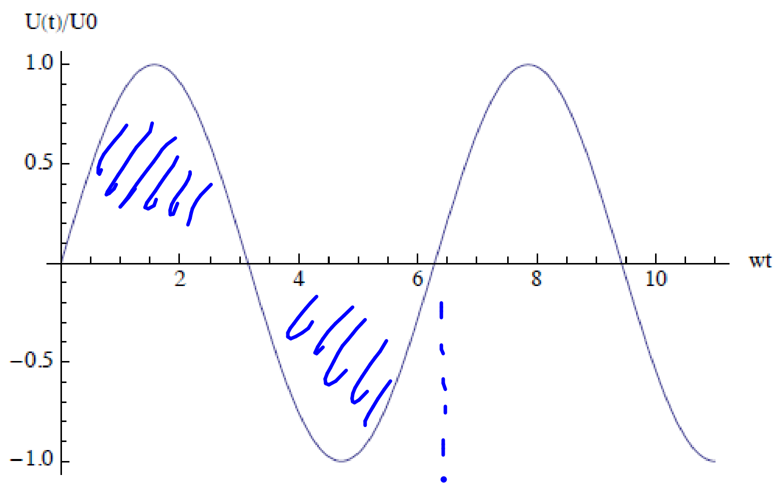
Strom und Spannung können gegeneinander phasenverschoben sein!

Effektivwerte

Verschiedene Methoden, um zeitliche Mittelwerte von sinusförmigen Strom-/Spannungs-Verläufen zu ermitteln:

Sinusförmiger Verlauf:

$\frac{U(t)}{U_0}$



ωt

ωt

T = Zeit für 1 volle Schwingung

„einfacher" Mittelwert:

$$\langle U\rangle = \underbrace{\frac{\int_0^T U(t)\cdot dt}{\int_0^T dt}}_{\text{Normierung! nicht vergessen}} = 0$$

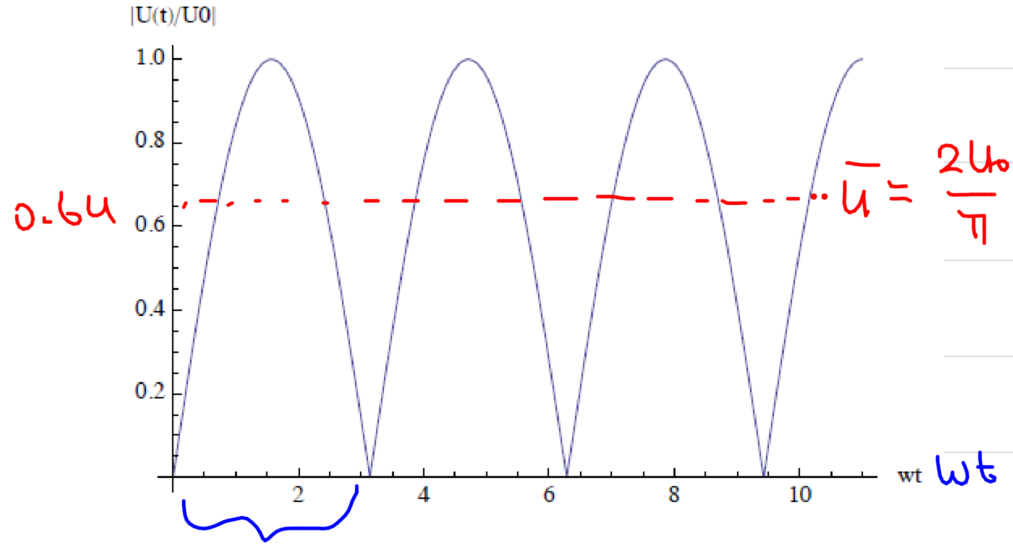
Normierung! nicht vergessen

→ pos. und neg. Beiträge gleich

Gleichrichtwert:

neg. Anteile erst umpolen, dann mitteln:

$|U(t)|U_0|$



periodisch schon in $\frac{T}{2}$

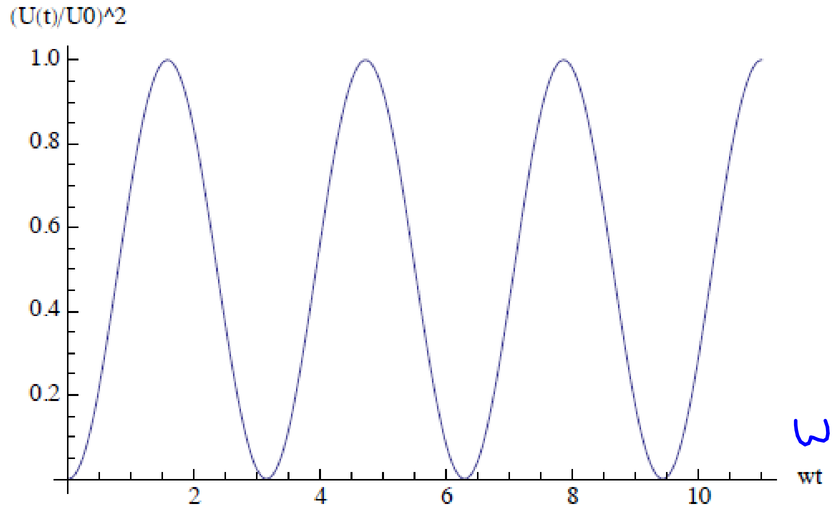
$$\bar{u} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} |u(t)|\, dt}{\underbrace{\int_0^{T/2} dt}_{=\frac{T}{2}}}$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} U_0 \cdot \sin(\overbrace{\omega}^{\frac{2\pi}{T}} t) \cdot dt$$

$$\bar{u} = \frac{2U_0}{T} \cdot \left[\frac{-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{2\pi / T} \right]_{t=0}^{t=\frac{T}{2}} = \frac{U_0}{\pi}[1+1] = \frac{2U_0}{\pi} \simeq 0.64U_0$$

Effektivwerte: Es soll so gemittelt werden, daß die gleiche Leistung wie bei einem Gleichstrom anfällt.

$|U(t)/U_0|^2$



ωt

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

↳ muss den Quadrat. Mittelwert bilden

$$U_{eff.}^2 = \frac{\int_0^T U^2(t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt$$

trig. theorem: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

↳ $\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2}$

$$= \frac{U_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2}}_{\frac{T}{2}} (1 - \underbrace{\cos 2\omega t)}_{0}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad U_{eff}^2 = \frac{U_0^2}{2}$$

Also, $\boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$, entspr. $\boxed{I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$

$\simeq 0{,}71\, U_0$ $\qquad \simeq 0.71\, I_0$

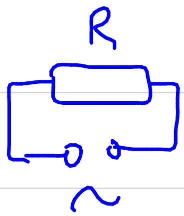
für sinusförmige Verläufe von $U(t)$, $I(t)$

$U_0 = 325\,V \Longleftrightarrow U_{eff} = \underbrace{230\,V}$

Wechselstromwiderstände

Phasenunterschied zwischen $U(t)$ und $I(t)$ wichtig!

Wirkwiderstand, Ohmscher Widerstand



Einfacher ohmscher Widerstand,

Strom und Spannung „in Phase“:

$$R_W = R_\Omega = \frac{U}{I} = \frac{U_0 \sin(\omega t)}{I_0 \sin(\omega t + 0)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

wie bei Gleichstrom!

Kapazitiver Blindwiderstand

Induktiver Blindwiderstand

Frequenzverhalten

Zeigerdiagramm