# Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
## Sommersemester 2008

## Übungsblatt Nr. 2

### Aufgabe 9: Ladungsverteilung

a) Die Gesamtladung einer kreisförmigen Oberfläche ist gegeben durch:

$$Q=\int_A \sigma(r)\, dA=\int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma(r)\, r\, dr\, d\phi$$

(i) $$Q=\int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_0 \frac{r}{a} r\, dr\, d\phi=\frac{\sigma_0}{a}\int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi=\frac{\sigma_0}{a}\cdot\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a [\phi]_0^{2\pi}=\frac{2}{3}\sigma_0 \pi a^2$$

(ii) $$Q=\int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_0 e^{-\frac{r}{a}} r\, dr\, d\phi=2\pi\sigma_0\cdot\underbrace{\int_0^a r\cdot e^{-\frac{r}{a}} dr}_{(A)} \qquad \textbf{(I)}$$

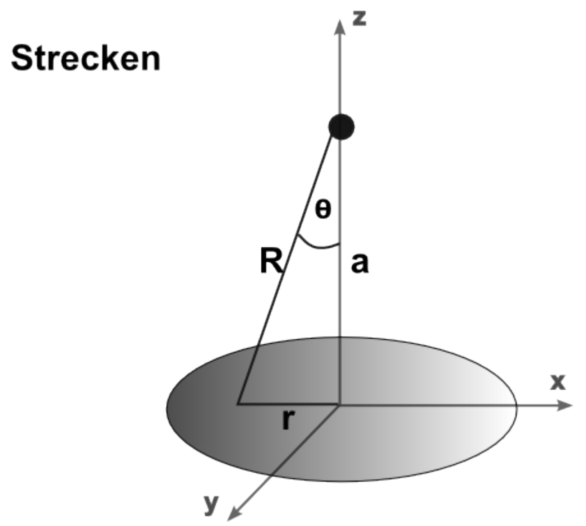
Integriere nun den Term **(A)** mit partieller Integration:

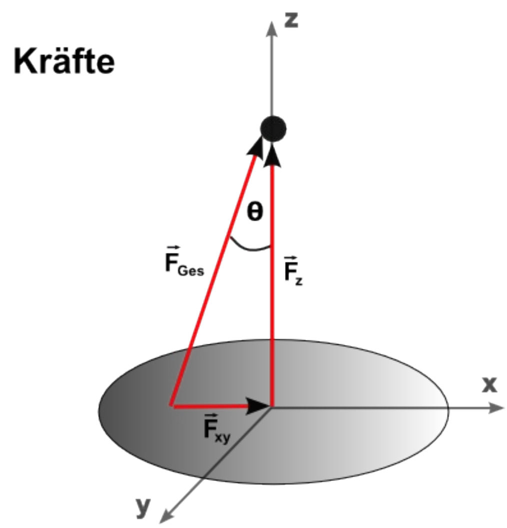
$$\int_0^a \underbrace{r}_{f}\cdot\underbrace{e^{-\frac{r}{a}}}_{g'} dr=\left[\underbrace{r}_{f}\cdot\underbrace{\left(-a\, e^{-\frac{r}{a}}\right)}_{g}\right]_0^a-\int_0^a \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\left(-a\, e^{-\frac{r}{a}}\right)}_{g} dr=\left[\frac{-a^2}{e}-0\right]-\left[a^2 e^{-\frac{r}{a}}\right]_0^a=\frac{-2a^2}{e}+a^2$$

Wiedereinsetzen in **(I)**:

$$Q=2\pi\sigma_0\cdot\left(-\frac{2a^2}{e}+a^2\right)=2\pi\sigma_0 a^2\cdot\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

b) Betrachten wir uns zunächst mal eine Skizze des Problems:



Die Kraft wird nun mit Hilfe des Coulomb-Gesetzes ausgedrückt:

$$d\vec{F}_{Ges}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sigma\, dA}{|\vec{R}|^2}\cdot\vec{e}_F$$

Aus Symmetriegründen folgt, dass die horizontalen Kraftkomponenten in der x-y-Ebene wegfallen (die Probeladung liegt genau über dem Mittelpunkt der Kreisscheibe und die Ladungsverteilung $\sigma\sim r$ ). Daher können wir uns auf die z-Komponente der Kraft beschränken:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{F}_z|}{|\vec{F}_{Ges}|} \qquad \rightarrow|d\vec{F}_z|=\cos\theta\cdot|d\vec{F}_{Ges}|$$

$$\rightarrow\ dF=|d\vec{F}_z|=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sigma\, dA}{|\vec{R}|^2}\cdot\cos\theta$$

Nun können wir $|\vec{R}|=R$ ausdrücken durch:

$$\cos\theta=\frac{a}{R} \qquad \rightarrow R=\frac{a}{\cos\theta}$$

$$\rightarrow\ dF=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sigma\, dA}{a^2}\cdot\cos^3\theta$$

Wenn wir nun unsere Ladungsdichte $\sigma$ und unser Flächenelement $dA$ aus a) einfügen, folgt:

$$\rightarrow\ dF=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\left(\sigma_0\frac{r}{a}\cdot r\,dr\,d\phi\right)}{a^2}\cdot\cos^3\theta=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{r^2\,dr}{a^3}\cdot\cos^3\theta\cdot d\phi \qquad \textbf{(II)}$$

Nun wollen wir noch das $r$ durch $a$ und $\theta$ ausdrücken:

$$\tan\theta=\frac{r}{a} \qquad \rightarrow r=\tan\theta\cdot a$$

Zudem müssen wir nun natürlich auch $dr$ ersetzen:

$$r=\tan\theta\cdot a \qquad \rightarrow\frac{dr}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\cdot a=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cdot a=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot a=\frac{a}{\cos^2\theta}$$

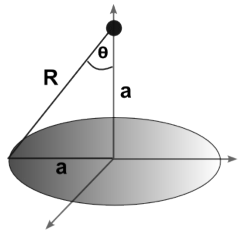
$$\rightarrow dr=\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

Einsetzen von $r$ und $dr$ in **(II)**:

$$dF=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\tan^2\theta\cdot a^2\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta}{a^3}\cdot\cos^3\theta\ d\phi=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\tan^2\theta\cos\theta\, d\theta\ d\phi$$
$$=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta\ d\phi=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1-\cos^2}{\cos\theta}d\theta\ d\phi=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)d\theta\ d\phi$$

Nun integrieren wir $dF$ um $F$ zu erhalten. Dazu benötigen wir erstmal unsere Integralsgrenzen. Da wir immer noch einen Vollkreis haben, muss $d\phi$ im Intervall $[0,2\pi]$ integriert werden. $\theta$ hingegen muss so lange integriert werden, bis $R$ den Kreisrand berührt:

$$\rightarrow \tan\theta=\frac{a}{a}=1$$




$$\rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \qquad \rightarrow \text{integrieren in}[0,\pi/4]$$

Jetzt integrieren wir:

$$F=\int^{F} dF=\frac{q\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)d\theta=\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)d\theta$$

Mit Hilfe der Hinweise auf unter der Aufgabe kommen wir nun auf folgende Lösung:

$$F=\frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}087\cdot\frac{q\sigma_0}{\epsilon_0}$$

## A10: Ablenkung im E-Feld

a) Da wir uns am Anfang entlang der x-Achse bewegen, haben wir nur in der x-Komponente eine Geschwindigkeit $v_x$ mit:

$$E_{kin}=\frac{1}{2}m_e v_x^2 \qquad \rightarrow v_x=\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_e}}$$

Auf das Teilchen wirkt durch das $\vec{E}-\text{Feld}$ eine Kraft $\vec{F}$ :

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{e} \qquad \rightarrow \vec{F}=m_e\cdot\vec{a}=\vec{E}\cdot e \qquad \rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{E}\cdot e}{m_e}=\frac{|\vec{E}|\cdot e}{m_e}\cdot\vec{e}_y$$

Die Kraft führt also nur zu einer Beschleunigung in der y-Komponente. Mit den Anfangsbedingungen $\dot{y}(0)=y(0)=0$ folgt:

$$\rightarrow \ddot{y}=\frac{|\vec{E}|\cdot e}{m_e}=\frac{E\cdot e}{m_e} \qquad \rightarrow y=\frac{E\cdot e}{2m_e}\cdot t^2$$

Da wir keine Beschleunigung in der x-Richtung haben, haben wir eine konstante Geschwindigkeit $v_x$ , die natürlich der Anfangsgeschwindigkeit entspricht:

$$\rightarrow \dot{x}=v_x \qquad x=v_x\cdot t \qquad \rightarrow t=\frac{x}{v_x}$$

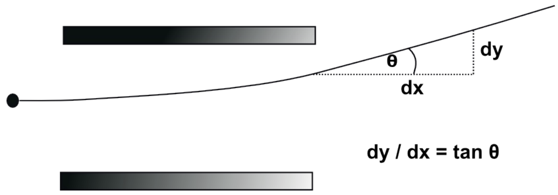
Dies setzen wir nun in unseren y(t)-Term ein, um einen y(x)-Term zu erhalten:

$$y=\frac{E\cdot e}{2m_e}\cdot t^2=\frac{E\cdot e}{2m_e}\cdot\left(\frac{x}{v_x}\right)^2=\frac{E\cdot e}{2m_e v_x^2}\cdot x^2=\frac{E\cdot e}{2m_e\left(\frac{2E_{kin}}{m_e}\right)}\cdot x^2=\frac{E\cdot e}{4E_{kin}}x^2=2{,}67\cdot\frac{x^2}{m}$$

b) Da das Ende der Ablenkplatten sich bei $x=0{,}04\,m$ befindet, setzten wir einfach diesen Wert in unsere Funktion $y(x)$ ein um die entsprechende Ablenkung zu erhalten:

$$y(0{,}04\,m)=\frac{2{,}67\cdot(0{,}04\,m)^2}{m}=0{,}004272\,m=4{,}272\,mm$$

c) Wir bilden nun die Ableitung von $y(x)$ um die Steigung der Bewegung zu erhalten. Diese Steigung entspricht dem Tangens des Winkels $\theta$ den wir suchen:



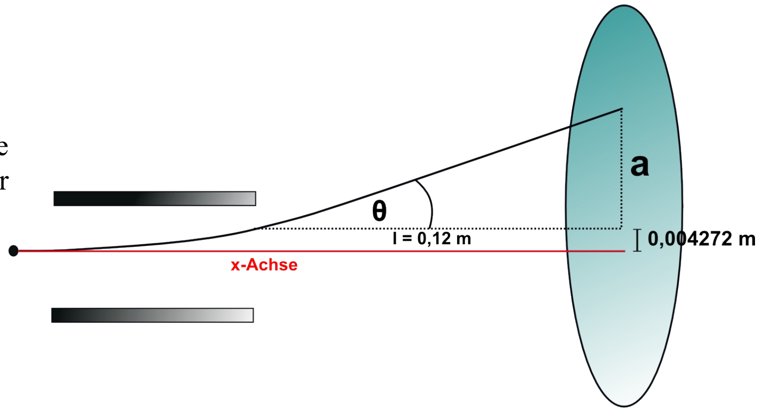

$$y'(x)=5{,}34\frac{x}{s}$$

$$y'(0{,}04\,m)=\tan\theta$$

$$\rightarrow\theta=\arctan(0{,}04\,m)=\arctan 0{,}2136=0{,}21=12\,°$$

d) Wir haben nun den Winkel $\theta$ und die Länge $l=0{,}12\,m$ und können somit die Strecke $z$ berechnen, die das Elektron in y-Richtung vom Ende der Ablenkplatte bis zum Schirm zurücklegt.

$$z=0{,}004272\,m[\text{aus Aufgabenteil b)}]+a$$




Nun benötigen wir noch die Strecke $a$. Diese können wir mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen errechnen:

$$\tan\theta=\frac{a}{0{,}12\,m}\quad\rightarrow\quad a=\tan\theta\cdot 0{,}12\,m\approx 0{,}0255\,m$$

Somit folgt für die Gesamtstrecke $z$:

$$z=0{,}004272\,m+0{,}255\,m\approx 0{,}03\,m=3\,cm$$

A11:

a) Auf die Spannung, die wir benötigen um das Elektron auf 95 % der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, kommen wir, indem wir die Relation zwischen (hier kinetischer) Energie und Spannung betrachten:

$$U=\frac{E}{q}=\frac{E}{e}$$

Für die relativistische kinetische Energie gilt:

$$E=m_0c^2\cdot(\gamma-1) \qquad \text{mit } \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Setzen wir nun also $v=0{,}95\cdot c$ folgt:

$$E=m_0c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}95\,c)^2}{c^2}}}-1\right)\approx 1{,}8\cdot 10^{-13}\,J \qquad \rightarrow\ U=\frac{E}{e}=1{,}125\cdot 10^{6}\,V$$

b) Zunächst betrachten wir die Relation von der kinetischen Energie $E_{kin}=E$ und der Geschwindigkeit $v$ :

$$E=m_0c^2\cdot(\gamma-1)=m_0c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \qquad \rightarrow\ \frac{v}{c}=\sqrt{1-\frac{(m_0c^2)^2}{(m_0c^2+E)^2}}$$

Nun müssen wir zunächst die Energie in Joule umrechnen:

$$E=10^{10}\,eV=10^{10}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot\frac{J}{C}=1{,}6\cdot 10^{-9}\,J$$

Uns ist nun angegeben, dass:

$$\frac{e}{m_{0\,\text{Proton}}}=9{,}579\cdot 10^{7}\,\frac{C}{kg} \qquad \rightarrow\ m\,0\,Proton=1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg$$

Einsetzen in unsere Verhältnisformel bringt uns:

$$\frac{v}{c}\approx 0{,}9963\ \rightarrow\ 99{,}63\%\ \text{der Lichtgeschwindigkeit}$$

Wen wir das nun in unsere Formel für die Masse einsetzen, bekommen wir:

$$m(0{,}9963\,c)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(0{,}9963\,c)^2}{c^2}}}=11{,}64\cdot m_0 \qquad \rightarrow\ \text{das 11,64 fachen seiner Ruhemasse}$$

A12: Vorgriff – Potential und Feldstärke

a) Es gibt nun 2 Möglichkeiten die Integrale zu berechnen. Ich werde beide für jeweils ein Integral benutzen.

(i) Wir wollen nun zunächst entlang der x-Achse und dann entlang der y-Achse von $(0{,}0{,}0)$ zu $(x_{1,}\, y_1, 0)$ integrieren:

$$P=\int_P \vec{E}\, d\vec{r}=\left(\int_0^{x_1} \vec{E}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{y=0}+\left(\int_0^{y_1} \vec{E}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix}\right)_{x=0}$$

$$=\left(\int_0^{x_1} 6xy\; dx\right)_{y=0}+\left(\int_0^{y_1} (3x^2-3y^2)\; dy\right)_{x=x_1}=0+\left(\left[3x^2 y-y^3\right]_0^{y_1}\right)_{x=x_1}=3x_1^2 y_1-y_1^3$$

Jetzt integrieren wir zuerst entlang der y-Achse und dann entlang der x-Achse. Nun benutzen wir den anderen Ansatz um das Integral zu lösen (man kann auch diesen Integral wie in (i) lösen):

$$P=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\; d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\;\frac{d\vec{r}}{dt}\; dt=\int_{t_1}^{t_2} \vec{E}\,\dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

Nun müssen wir uns also eine Ortsvektor $\vec{r}(t)$ und einen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ suchen, der uns zunächst die Bahn von $(0{,}0{,}0)$ zu $(0, y_1, 0)$ beschreibt:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 t \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{für } t=[0,1]) \qquad \rightarrow \vec{E}=\begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2-3y^2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3y_1^2 t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\; \dot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das Integral:

$$P_1=\int_0^1 \vec{E}\,\dot{\vec{r}}(t)\, dt=\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3y_1^2 t^2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} dt=\int_0^1 -3y_1^3 t^2\, dt=\left[-y_1^3 t^3\right]_0^1=-y_1^3$$

Nun müssen wir noch die Bahn von $(0, y_1, 0)$ zu $(x_{1,}\, y_{1,0})$ berechnen:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_1 t \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{für } t=[0,1]) \qquad \rightarrow \vec{E}=\begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2-3y^2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x_1 y_1 t \\ 3x_1^2 t^2-3y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\; \dot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das Integral:

$$P_2=\int_0^1 \vec{E}\,\dot{\vec{r}}(t)\,dt=\int_0^1 \begin{pmatrix} 6x_1 y_1 t \\ 3x_1^2 t^2-3y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt=\int_0^1 6x_1^2 y_1 t\,dt=\left[3x_1^2 y_1 t^2\right]_0^1=3x_1^2 y_1$$

Daraus folgt für das Gesamtpotential:

$$P=P_1+P_2=-y_1^3+3x_1^2 y_1$$

Somit sind bei beiden Wegen die Integrale dieselben. Man könnte nun annehmen, dass es ein konservatives Kraftfeld ist. Eigentlich müsste man dies für die b) noch beweisen mit:

$$\nabla x\ \vec{E}=0$$

jedoch wird dies schon als bewiesen angesehen.

b) Berechnen wir nun also den Gradienten des Potentials um wieder auf den Feldvektor zu kommen:

$$F=\nabla V=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\left(3x^2 y-y^3\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial(3x^2 y-y^3)}{\partial x} \\ \frac{\partial(3x^2 y-y^3)}{\partial y} \\ \frac{\partial(3x^2 y-y^3)}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2-3y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$