

## Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik) Sommersemester 2008

### Übungsblatt Nr. 9

#### Aufgabe 33: Zyklotron: e/m Messung, Isotopenbestimmung

a) Das Teilchen bewegt sich dann auf einer geraden Bahn, wenn das E-Feld und B-Feld sich genau aufheben, also:

$$F_{el} = q \cdot E = q \cdot v \cdot B = F_L$$

$$\frac{q \cdot U}{d} = q \cdot v \cdot B$$

$$v = \frac{U}{d \cdot B} = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 0,66 c$$

Nun berechnen wir  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1,34164$ . Damit müssen wir also relativistisch rechnen.

b) Da sich das Teilchen nun senkrecht in ein B-Feld eintritt, wird es auf einer Kreisbahn laufen, da die Lorentzkraft immer senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt:

$$F_{ZP} = \frac{m v^2}{r} = q v B = F_L$$

$$\rightarrow \frac{q}{m} = \frac{v}{r B}$$

Jetzt benötigen wir den Radius  $r$ , um das Verhältnis  $q/m$  zu berechnen. Dazu betrachten wir die Bahnkurve des Teilchens. Für den Winkel  $\alpha$  gilt:

$$\alpha = \arctan \frac{a}{L} \approx 0,0028 = 0,16^\circ$$

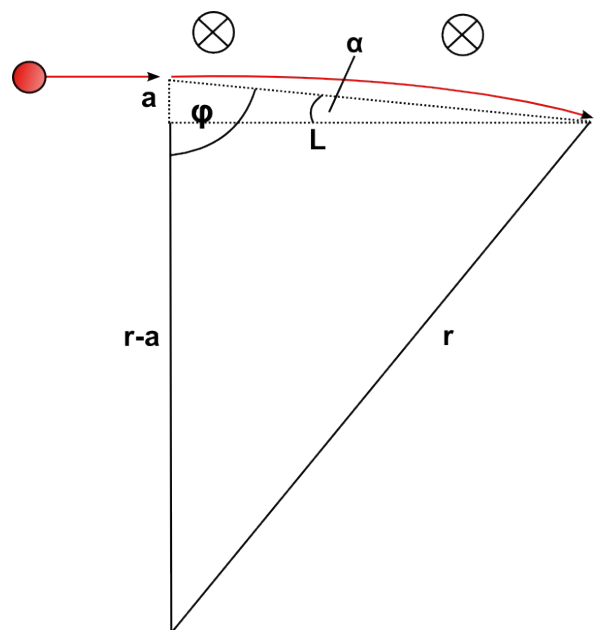
Damit ist  $\alpha$  vernachlässigbar klein und wir können sagen:

$$\phi \approx 90^\circ$$

Damit können wir nun den Satz des Pythagoras nutzen und haben:

$$(r - a)^2 + L^2 = r^2$$

$$\rightarrow r = \frac{a^2 + L^2}{2a} = 284,45 m$$



Jetzt müssen wir die Formel für  $q/m$ , die wir weiter oben hergeleitet haben noch anpassen, denn durch die sehr hohe Geschwindigkeit des Teilchens müssen wir relativistisch rechnen. Es gilt nun also:

$$m(v) = m_0 \cdot \gamma \quad \rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{q}{m_0 \cdot \gamma} = \frac{v}{r B}$$

$$\rightarrow \quad \frac{q}{m_0} = \frac{v \gamma}{r B} = 9,28 \cdot 10^7 \frac{C}{kg}$$

Daraus folgt für die Masse  $m_0$  des geladenen Ions:

$$m_0 = \frac{q}{9,28 \cdot 10^7 C/kg} = \frac{n \cdot e}{9,28 \cdot 10^7 C/kg} = n \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} kg = n \cdot m_{Proton}$$

Daher kann es sich nur um Moleküle handeln, in denen es nur Protonen gibt. Es gibt aber keine Moleküle nur mit Protonen, daher handelt es sich hier um ein einfaches Proton, also ein positives Wasserstoffion.

c) Nun können wir die kinetische Energie des Ions berechnen:

$$E_{kin} = (\gamma - 1) m_0 c^2 = 5,1 \cdot 10^{-11} J = 3,1875 \cdot 10^8 eV$$

Da das Proton pro halben Umlauf die Energie  $20 keV$  bekommt, bekommt es pro Umlauf die Energie  $E_{Umlauf} = 40 keV$  und damit folgt für die Zahl der Umläufe:

$$n = \frac{E_{kin}}{E_{Umlauf}} = \frac{3,1875 \cdot 10^8 eV}{40 keV} \approx 8000 \text{ Umläufe}$$

**A 34: Drehspulinstrument**

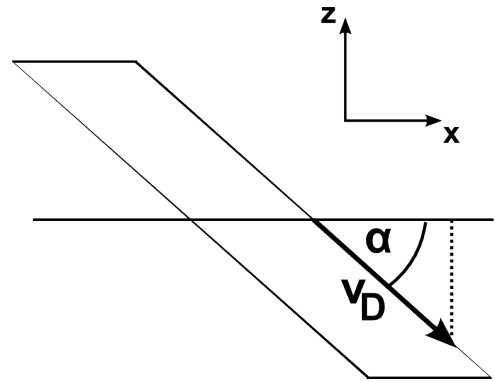
a) Zunächst bestimmen wir die Gesamtgeschwindigkeitsvektoren der Ströme 1,2,3,4. Der Betrag  $|v|=v_D$  aller Ströme ist derselbe und beträgt:

$$v_D = \frac{I \cdot l}{q}$$

Aus der Skizze wird offensichtlich:

$$\vec{v}_1 = n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = -n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_4 = n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Berechnen wir nun also die Kräfte:

$$\vec{F}_1 = q \cdot \vec{v}_1 \times \vec{B} = q \cdot n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -q \cdot n \cdot v_D \sin \alpha B \vec{e}_y = -I \cdot n \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot B \cdot \vec{e}_y$$

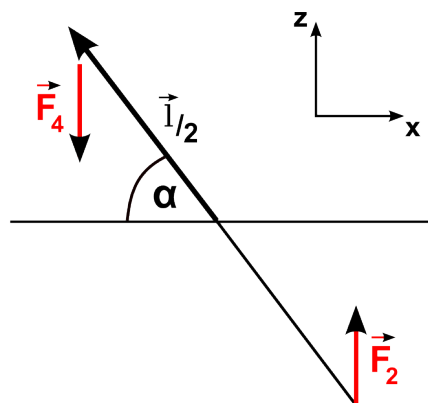
$$\vec{F}_2 = q \cdot \vec{v}_2 \times \vec{B} = n \cdot q \cdot (-v_D) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q \cdot n \cdot v_D B \vec{e}_z = I \cdot n \cdot l \cdot B \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_3 = q \cdot \vec{v}_3 \times \vec{B} = q \cdot n \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q \cdot n \cdot v_D \sin \alpha B \vec{e}_y = I \cdot n \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot B \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_4 = q \cdot \vec{v}_4 \times \vec{B} = n \cdot q \cdot v_D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -q \cdot n \cdot v_D B \vec{e}_z = -I \cdot n \cdot l \cdot B \cdot \vec{e}_z$$

b) Die Kräfte  $\vec{F}_1, \vec{F}_3$  führen zu keinem Drehmoment, da  $\vec{F}_1, \vec{F}_3 \parallel$  Drehachse  $\vec{\omega}$ . Damit haben wir folgendes Drehmoment. Wir sehen zudem oben, dass  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$ :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_4 - \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_2 \qquad \text{mit } \vec{F}_2 = -\vec{F}_4 \\ &= \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_4 + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_4 \\ &= \vec{l} \times \vec{F}_4 \end{aligned}$$



Nun ist unser Vektor  $\vec{l}$  gegeben durch:

$$\vec{l} = l \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Damit folgt für unser Drehmoment:

$$\vec{M}(\alpha) = \vec{l} \times \vec{F}_4 = l \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \cdot n \cdot l \cdot B \end{pmatrix} = -I \cdot n \cdot l^2 \cdot B \cdot \cos \alpha \cdot \vec{e}_y$$

$$\rightarrow M(\alpha) = I \cdot n l^2 \cdot B \cdot \cos \alpha = I \cdot A \cdot V \cdot \cos \alpha$$

Mit  $A = n l^2$  als der „effektiven Fläche“ der Spule.

c) Das Drehspulinstrument befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn das rückstellende Drehmoment  $\vec{M}_{Drehspule}$  gleich dem Drehmoment ist, das durch den Strom im B-Feld erzeugt wird:

$$M_{Drehspule} = M_{Strom}$$

$$C \cdot \alpha = I A B \cos \alpha$$

$$\rightarrow I = \frac{C \alpha}{A B \cos \alpha}$$

d) Nun müssen wir zunächst wissen, welche Auslenkung ein Strom der Stärke  $1 \mu A$  hervorruft. Da wir dies nicht elementar aus unserer Gleichung für  $I$  gewinnen können, führen wir eine Taylorentwicklung um  $90^\circ = \pi/2$  durch, da wir wissen, dass die Auslenkung relativ groß sein wird und maximal  $\pi/2$  sein kann:

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\alpha) = [\cos(\alpha)]_{\alpha=\pi/2} - [\sin(\alpha)]_{\alpha=\pi/2} \cdot (\alpha - \pi/2) + O(\alpha^2) \approx \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{um } \alpha = \pi/2$$

Einsetzen in unsere Gleichung für  $I$  führt uns zu:

$$I = \frac{C \alpha}{A B \cos \alpha} \approx \frac{C \alpha}{A B (\pi/2 - \alpha)}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{I A B \pi}{2(C + I A B)} = 1,256637 = 72^\circ$$

Da wir eine Ungenauigkeit von  $0,5^\circ$  haben, sind die maximalen Fehlwerte bei:

$$I(71,5^\circ) = i \qquad I(72,5^\circ) = i$$

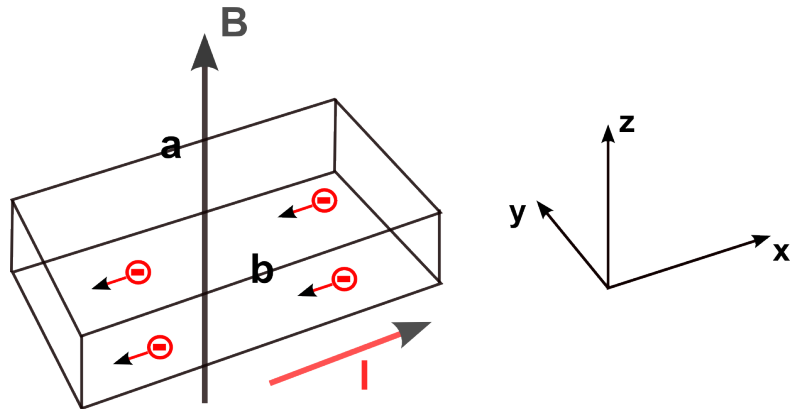
**A 35: Hall-Effekt**

a) Die konventionelle Stromrichtung geht in positive x-Richtung, also fließen die Elektronen, die durch das  $\vec{B}$ -Feld abgelenkt werden in die negative x-Richtung:

Damit folgt für die Vektoren  $\vec{v}_e, \vec{B}$  :

$$\vec{v}_e = |v_D| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Il}{e} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$



Damit wirkt folgende Lorentzkraft auf die Elektronen:

$$\vec{F}_L = -e \cdot \vec{v}_e \times \vec{B} = -Il \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = -IlB \vec{e}_y$$

Damit werden die Elektronen in Richtung der negativen y-Achse abgelenkt und damit in Richtung von  $b$ .  
Damit herrscht an  $a$  das höhere Potential.

b) Wir machen nun dasselbe wie in der Teilaufgabe a), nur fließt in unserem Strom nun positive Ladungen und zwar diesmal in die konventionelle Stromrichtung:

$$\vec{v} = |v_D| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Il}{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_L = e \cdot \vec{v} \times \vec{B} = Il \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = -IlB \vec{e}_y$$

Daher werden die positiven Ladungen ebenfalls nach  $b$  abgelenkt. Da dort nun mehr positive Ladungen als in  $a$  sind, herrscht nun also hier in  $b$  das höhere Potential.