

Aufgabe 1 Rechenübungen zum Nabla-Operator (3 Punkte)

- a) Berechnen Sie den Gradienten,
- $\text{grad } f$
- , des skalaren Feldes:

$$f(x, y, z) = \frac{30}{2 + x^2 + y^2 + z^2} = \frac{30}{2 + r^2}$$

- b) Das Geschwindigkeitsfeld
- \vec{v}
- einer gleichmäßig rotierenden Flüssigkeit sei gegeben durch
- $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- mit der Winkelgeschwindigkeit
- $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$
- und
- $\vec{r} = (x, y, z)$
- .

Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld quellenfrei ist, d.h. seine Divergenz verschwindet, d.h. $\text{div } \vec{v} = 0$.

- c) Berechnen Sie die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes von
- \vec{v}
- (aus Teil b)),
- $\text{rot } \vec{v} = ?$

Aufgabe 2 Ladungsverteilung I (4 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtladung Q und die mittlere lineare Ladungsdichte $\bar{\lambda} = \frac{Q}{L}$ eines dünnen Stabs der Länge L . Die Ladungsdichte des Stabs ist gegeben durch $\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L}$, wobei x der Abstand von einem Ende des Stabs zu einem Punkt auf dem Stab ist. λ_0 ist eine Konstante.

Aufgabe 3 Ladungsverteilung II (4 Punkte)

Eine kreisförmige Scheibe in der x, y -Ebene mit Mittelpunkt bei $(0, 0, 0)$ und Radius a hat auf einer Seite eine Oberflächenladung mit Ladungsdichte (i) $\sigma = \sigma_0 r/a$, und (ii) $\sigma = \sigma_0 \exp(-\frac{r}{a})$, wobei σ_0 eine Konstante ist.

- a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q für (i) und (ii).
 b) Welche Kraft wirkt auf Teilchen der Ladung q am Punkt $Q(0, 0, a)$ im Falle (i)?

Hilfe: $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right) + C$

Aufgabe 4 Coulombkraft (2 Punkte)

Wie verhalten sich die Beträge der gegenseitigen Coulombkräfte F_1 und F_2 zweier Punktladungen, wenn sich ihre Ladungsmengen Q wie $Q_1: Q_2 = 2:3$ verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

- i) $F_1 = F_2$ ii) $2F_1 = 3F_2$ iii) $3F_1 = 2F_2$ iv) $4F_1 = 9F_2$ v) $9F_1 = 4F_2$