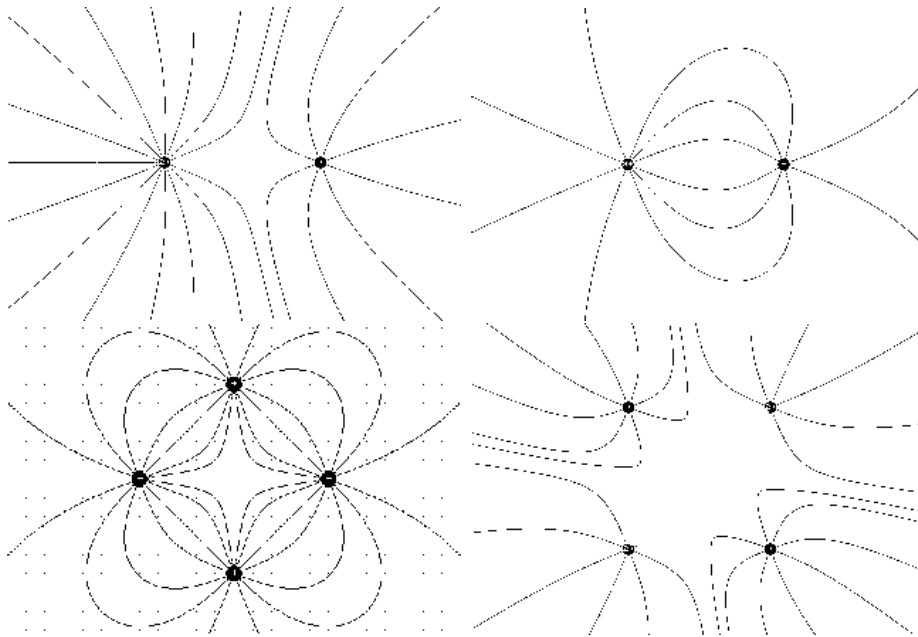
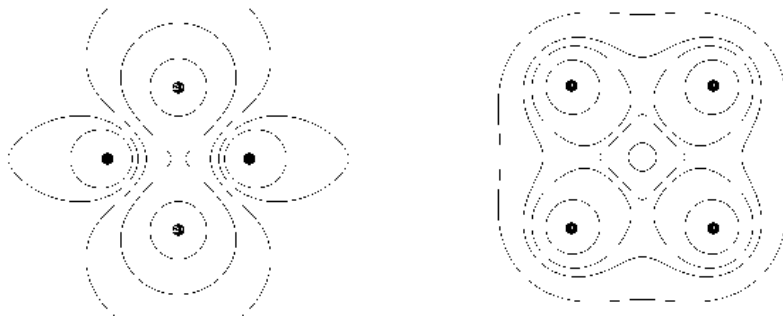


1. Felder und Potentiale

(a) Zeichnen sie die E-Felder ein.



(b) Zeichnen sie die Äquipotentiale ein.



## 2. Ladung

Wieviele Elektronen sind in 1 Coulomb (C) enthalten?

Welche Ladung  $Q$  und Masse  $m$  hat  $n=1$  Mol Elektronen.

Antwort: a)  $6,24 \cdot 10^{18}$ ; b)  $\frac{Q}{n} = \frac{N_A}{e} = F = 96485 \frac{C}{mol}$  (Faraday – Konstante), somit  $Q \approx 10^5 C$ ,  $m \approx 0,55 mg$ .

## 3. elektrische Kraft und Gravitation

- (a) Die Gravitation  $F_{\text{Grav.}}$  und die elektrische Kraft  $F_{\text{elektr.}}$  sind radiale Kräfte und es gilt für die Kraft zwischen zwei Elektronen:

$$F_{\text{Grav.}} = \gamma \frac{m_e^2}{r^2} \quad ; \quad F_{\text{elektr.}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Mit den Konstanten  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ ,  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} C/(Vm)$  und  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}/\text{kg}$  folgt dann

$$\left| \frac{F_{\text{elektr.}}}{F_{\text{Grav.}}} \right| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma m_e^2} = 4.167 \cdot 10^{42}$$

- (b) Damit beide Kräfte betragsmässig gleich groß sind, müsste die quadratische Masse  $m_e^2$  um genau den Faktor  $4.167 \cdot 10^{42}$  größer sein. Daraus folgt, dass das Elektron eine Masse von

$$m'_e = \sqrt{4.167 \cdot 10^{42}} m_e = 2.04 \cdot 10^{21} m_e = 1.86 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

besitzen müsste.

- (c) Bleiklumpen

$$|F_G| = |F_C| \iff \frac{G \cdot m^2}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow q = \pm m \sqrt{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot G} = 8.62 \cdot 10^{-10} C \quad (2)$$

Das sind  $N_e = \frac{q}{e} = 5.378 \cdot 10^9$  Elementarladungen. Anzahl Pb-Atome in 10kg:  
 $N_{PB} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Pb}} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Pb}} = 2.91 \cdot 10^{25}$  mit  $m_P$  Masse eines Pb-Atome und  
 $M_{Pb} = \frac{0.2072 \text{ kg}}{\text{mol}}$  molare Masse von Pb.  
 Anzahl benötigter Ladungen vgl. mit Anzahl Pn-Atomen pro Kugel  $\frac{N_e}{N_{PB}} = 1.85 \cdot 10^{-16}$

#### 4. Punktladungen und Kräfte

Die Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  befinden sich auf der  $x$ -Achse, die Ladung  $q_3$  hat den gleichen Abstand  $r$  zu beiden Ladungen auf der  $x$ -Achse, die Koordinaten von  $q_3$  in der  $x$ - $y$ -Ebene sind folglich  $x_3 = 0.5(x_2 + x_1)$  und  $y_3 = \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}$ .

(a) Für den Vektor  $\vec{r}_{13}$  ergibt sich dann

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2+x_1}{2} \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für den Einheitsvektor

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

und für die Kraft auf  $q_3$

$$\vec{F}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich

$$\vec{F}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Insgesamt wirkt auf  $q_3$  somit die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2}(q_1 - q_2) \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

Mit den angegebenen Werten für die Ladung  $q_1$  sowie die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  und  $q_2 = -4q_1$  ergibt sich hieraus

$$\vec{F} = 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 7.5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{F}| = 2.88 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{56.25 + 36} = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

(b) Für den Fall  $q_2 = q_1$  ergibt sich direkt aus der allgemeinen Beschreibung von  $\vec{F}$  in Teilaufgabe (a):

$$\vec{F} = 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{F}| = 1.15 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

- (c) Mit  $x_3 = x$  und  $x_1 = 0$  ergibt sich für die auf der  $x$ -Achse liegende Ladung  $q_3$  die Kraft (in der  $x$ -Achse, deshalb betrachten wir im folgenden die Kraft als Skalar), wobei wir  $q_2 = N \cdot q_1$  gesetzt haben:

$$F = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\delta_1}{x^2} + \frac{\delta_2 \cdot N}{(x - x_2)^2} \right)$$

mit  $\delta_1 = \text{sign}(x)$ ,  $\delta_2 = 1$  für  $x > x_2$  und  $\delta_2 = -1$  für  $x < x_2$  und  $N > 0$  sowie  $\delta_2 = -1$  für  $x > x_2$  und  $\delta_2 = 1$  für  $x < x_2$  und  $N < 0$ . Für die Nullstellen muss gelten

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta_1}{x^2} + \frac{\delta_2 \cdot N}{(x - x_2)^2}$$

Für den ersten Fall gilt  $q_1 = q_2 = 2q_3$  und somit folgt:

$$\begin{aligned} x < 0 & : \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ x > x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ 0 < x < x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = x_2/2 \end{aligned}$$

Für den zweiten Fall gilt  $q_1 = 2q_3$  und  $N = -4$  und somit folgt:

$$\begin{aligned} x < 0 & : \frac{-1}{x^2} + \frac{4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = (-1/3 \pm 2/3)x_2 \\ 0 < x < x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ x > x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{-4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = (-1/3 \pm 2/3)x_2 \end{aligned}$$

Für  $x < 0$  gibt es also nur eine Lösung, und zwar  $x = -x_2$ , für  $x > x_2$  gilt für die möglichen Lösungen  $x_{1/2} < x_2$ , also gibt es hier keine weiteren Nullstellen. Diese Lösungen können natürlich auch aus Symmetrieüberlegungen und der Skizze der Kraft als Funktion des Ortes  $x$  erhalten werden.

## 5. Potential eines Punktladungssystems, Potentialdifferenz (Spannung)

Das Potential einer einzelnen Punktladung  $Q$  im Abstand  $r$  von ihr berechnet sich zu  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Das von mehreren Ladungen erzeugte resultierende Potential an einem beliebigen Ort P ergibt sich durch Addition der Einzelpotentiale  $\varphi_i$ , die von den Ladungen  $Q_i$  mit den Abständen  $r_i$  von P unabhängig voneinander erzeugt werden. In Bezug auf den Eckpunkt  $P_1$  ist also

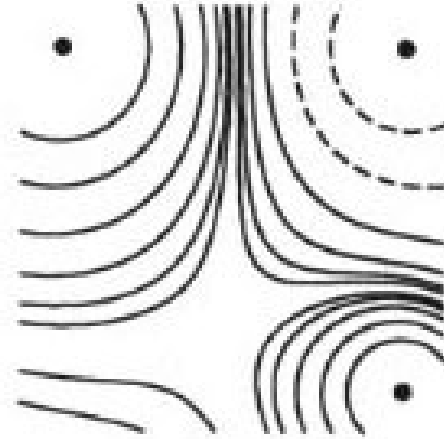
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{1i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{a\sqrt{2}} + \frac{Q_3}{a} \right) \quad (3)$$

Die Ladungen  $Q_i$  sind vorzeichenbehaftet einzusetzen. Mit  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ m/C}$  und den übrigen Werten erhält man  $\varphi_1 = 58,1 \text{ V}$ . Für  $P_2$  als Aufpunkt, der zu allen 3

Ladungen den Abstand  $a\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$  hat folgt.

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{1i}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_o} (Q_1 + Q_2 + Q_3) = 63,6V \quad (4)$$

Die Spannung  $U$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$  ist gleich der Potentialdifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 5.5V$ . Das Bild zeigt für das hier betrachtete Punktladungssystem die Linien



konstanten Potentials (Äquipotentiallinien).

*Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT*

*Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer*

*Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu*

*Email: Frank.Hartmann@kit.edu*

[www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm](http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm)