Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT

Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **Blatt 2** Bearbeitung: 04.5.2016

---

1. Coulombkraft

Wie verhalten sich die Beträge der gegenseitigen Coulombkräfte F_1 und F_2 zweier Punktladungen, wenn sich ihre Ladungsmengen Q wie $Q_1 : Q_2 = 2 : 3$ verhalten?
i) $F_1 = F_2$ ii) $2F_1 = 3F_2$ iii) $3F_1 = 2F_2$ iv) $4F_1 = 9F_2$ v) $9F_1 = 4F_2$

2. Ladungsverteilung I

Berechnen Sie die Gesamtladung Q und die *mittlere* lineare Ladungsdichte $\bar{\lambda}$ eines dünnen Stabs der Länge L. Die Ladungsdichte des Stabs ist gegeben durch $\lambda = \lambda_0(1 - x/L)x/L$, wobei x der Abstand von einem Ende des Stabs zu einem Punkt auf dem Stab ist. λ_0 ist eine Konstante.

3. Ladungsverteilung II

Eine kreisförmige Scheibe in der x, y-Ebene mit Mittelpunkt bei $(0, 0, 0)$ und Radius a hat auf einer Seite eine Oberflächenladung mit Ladungsdichte:
(i) $\sigma = \sigma_0 r/a$, (ii) $\sigma = \sigma_0 \exp(-r/a)$ wobei σ_0 eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q für (i) und (ii).

(b) Welche Kraft wirkt auf Teilchen der Ladung q am Punkt $Q(0, 0, a)$ im Falle (i)? (Hilfe: $\int \frac{1}{\cos x} dx = ln(\frac{1}{\cos x} + \tan x) + C$)

4. Vorgriff - Mathematisches Vorgeplänkel

Mit Hilfe des sogenannten Nabla-Operators (in kartesischen Koordinaten)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \qquad (1)$$

lassen sich der Gradient einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ sowie die Divergenz und Rotation einer vektorartigen Funktion $\vec{F}(x, y, z)$ schreiben.

$$grad\ f = \nabla f, \quad div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}, \quad rot\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \qquad (2)$$

Gegeben sei nun $f(x, y, z) = f(r) = r^{2n}$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Bestimmen Sie dafür:
(a) *grad f*, **(b)** *div grad f*, **(c)** *rot grad f*
Die Ergebnisse lassen sich auf alle Funktionen $f(r)$, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, verallgemeinern. Bestimmen Sie auch für ein allgemeines $f(r)$ die obigen drei Ausdrücke und überprüfen Sie Ihr Ergebnis für den Spezialfall $f(r) = r^{2n}$.

Hinweis: Die Ableitungen von $f(r)$ nach x, y, z können und müssen mit Hilfe der Kettenregel auf Ableitungen von $f(r)$ nach r zurückgeführt werden. Die Aufgabe läßt sich mit Ihrem Wissen über Vektoren und Ableitungen lösen, ohne die genauen mathematischen bzw. physikalischen Eigenschaften von den eventuellen neuen Begriffen Gradient, Divergenz und Rotation zu kennen!
Anmerkung: Den Vektor-Operatoren $grad, div$ *und* rot *werden Sie in diesem Semester noch des öfteren begegnen.*

5. Mathematisches Vorgeplänkel II - Fingerübungen mit dem Nablaoperator

Das Geschwindigkeitsfeld v einer gleichmäßig rotierenden Flüssigkeit sei gegeben durch $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ und $\vec{r} = (x, y, z)$
Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld quellenfrei ist, d.h. seine Divergenz verschwindet, d.h. $div\ v = 0$.
Berechnen Sie die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes von v, $rot\ v =?$

Virtuelles Rechnen - Aufteilung:
$\|\mathbf{1}\|\mathbf{2}\|\mathbf{3a}\|\mathbf{3b}\|\mathbf{4a,b}\|\mathbf{4c}\|\mathbf{5}\|$
Die Semesterklausur findet am Samstag 23.07.2016 13:00 - 15:00 Uhr statt.
Die Nachzüglerklausur findet am Samstag 15.10.2016 09:00 - 11:00 Uhr statt.
Die erste bestandene Klausur/Modulprüfung bestimmt Ihre Note. Die Voraussetzung (Vorleistung) zur Klausurteilnahme müssen mindestens **50% der Aufgabn** *virtuell* **gerechnet werden**.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm

Kleines Lexikon: Gradient, Divergenz, Rotation:

Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstieges (oder Abstieges) der Funktion $f(x, y, z)$ an. Er "verwandelt" ein skalares Feld in ein Vektorfeld.
Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich der Dichte des Flußes durch die Oberfläche eines Volumenelementes. (Maß für Quellen- und Senken-Dichte)
Die Rotation zeigt in Richtung der Flächennormale des Flächenelementes mit der größten Zirkulation. (Maß für die Wirbeleigenschaft des Feldes)

Operation	Feld	Ergebnis	Symbol
Gradient	Skalares Feld U	Vektorfeld $grad\ U$	$\nabla\ U$
Divergenz	Vektorfeld $\vec{V}$	Skalares Feld $div\ \vec{V}$	$\nabla \cdot \vec{V}$
Rotation	Vektorfeld $\vec{V}$	Vektorfeld $rot\ \vec{V}$	$\nabla \times \vec{V}$

Hamiltonscher Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z$, "nabla"
Laplace-Operator: $\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$

Besondere Felder:

$div\ rot\vec{V} = 0$	quellenfreies Rotorfeld
$rot\ gradU = 0$	wirbelfreies Gradientenfeld(konservativ), z.B. $\vec{E} = grad\ U$(Feldstärke)

Im quellenfreien Raum gilt "Laplacegleichung: $div\ gradU = \triangle U = 0$
Im quellenbehafteten Raum gilt die Poisson-Gleichung: $div\ gradU = \triangle U = \varrho$ mit der Quellendichte $\varrho = \varrho(x, y, z)$.
Beispiele der unterschiedlichen Felder finden Sie unter
http://www.math-grain.de/download/m3/vektoranalysis.php