

1. Ladungsverteilung und 3D-Integration

- Rechnungstechnisch, eine Erinnerung an die gute alte Zeit des Trägheitsmoments

(a) Eine einfache Ladungsverteilung

Gegeben sei ein nichtleitender Würfel der Kantenlänge  $a$ , dessen eine Ecke sich im Ursprung befindet. Die drei anliegenden Kanten zeigen in die positive  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Der Würfel besitzt eine Ladungsverteilung von

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \cdot (2x^2 + 4yz - 3xz)$$

Berechnen Sie die Gesamtladung des Würfels durch Integration über sein Volumen.

(b) Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Gegeben sei eine den Raum ausfüllende kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(r) = k \cdot \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{r^2}$$

wobei  $a$  und  $k$  Konstanten sind. Berechnen Sie die Gesamtladung im Raum. Integrieren Sie dazu die Ladungsdichte über ein Kugelvolumen mit unendlichem Radius. Hinweis: Verwenden Sie dazu Kugelkoordinaten, in denen das Volumenelement als  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  geschrieben werden kann. Integrieren Sie anschließend über  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  und  $r \in [0, \infty)$ .

2. Potential und Feldstärke

Ein elektrostatisches Feld wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$E_x = 6xy; \quad E_y = 3x^2 - 3y^2; \quad E_z = 0$$

(a) Berechnen Sie das Linienintegral von  $\vec{E}$  vom Ursprung aus zum Punkt  $P(x_1, y_1, 0)$ . Integrieren Sie erst entlang der  $x$ -Achse, dann entlang der  $y$ -Achse und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass sich durch *Gradientenbildung* der in (a) erhaltenen Potentialfunktion wieder die Komponenten des anfänglichen Feldes ergeben.

*Anmerkung: Zu jedem konservativen Kraftfeld  $F = F(x; y; z) = F(x)$  gibt es eine skalare Funktion, das Potential  $V = V(x)$ , so dass gilt:  $F = -\text{grad } V = \nabla V$ .*

### 3. Beschleunigte Ladung: Elektron/Proton

- (a) Welche Spannung muss ein Elektron im Vakuum durchlaufen, um auf 95% der Lichtgeschwindigkeit  $c$  beschleunigt zu werden? Beachten Sie die Massenzunahme durch relativistische Effekte des Elektrons. (Ruhemasse  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ )
- (b) In einem Teilchenbeschleuniger werden Protonen auf eine kinetische Energie von 10 GeV gebracht. Wie schnell ist das Teilchen (in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit  $c$ ). Auf das Wievielfache hat die bewegte Masse  $m$  gegenüber ihrer Ruhemasse  $m_0$  zugenommen? (Spezifische Ladung des Protons:  $\frac{e}{m_0} = 9.579 \cdot 10^7 \text{C/kg}$ .)
- (c) Eine Aufgabe 'Parabelbahn eines Elektron in einem Plattenkondensator mit konstantem Feld' spare ich uns!

### 4. Sie stehen unter Spannung - Schönes Wetter und atmosphärische elektrische Felder

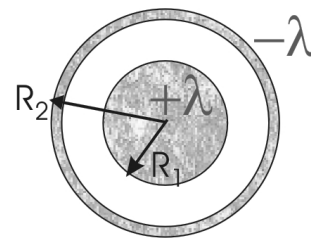
Bei ungestörtem schönem Wetter (wie diese Woche in Karlsruhe angekündigt) beträgt das lotrechte elektrische Feld in Bodennähe  $E_1 = 130 \text{V/m}$  und in  $h = 10 \text{km}$  Höhe  $E_2 = 4 \text{V/m}$

- (a) Welche Flächenladungsdichte  $\sigma$  der Erdoberfläche und welche (als homogen angenommene) Raumladungsdichte  $\rho$  der Atmosphäre folgt aus diesen Angaben?
- (b) Welche Potentialdifferenz  $U$  herrscht zwischen Erdoberfläche und 10 km Höhe?

### 5. E-Felder, Potential und Ladungsverteilungen - Hauptspass (ich meine Hauptaufgabe)

Berechnen und zeichnen Sie die elektrischen Felder und Potentiale in Abhängigkeit von  $z$  bzw.  $r$  folgender Ladungsverteilungen:

- (a) Wir betrachten eine homogen geladene  $(x,y)$ -Ebene mit Flächenladungsdichte  $\sigma$ . Als Gauss'sche Fläche wählen wir dementsprechend einen Quader (oder ein beliebiges Prisma) mit Deckfläche  $A$ . ( $z$ -Abhängig)
- (b) Hohlkugel mit Radius  $R$ , einer Flächenladungsdichte  $\sigma$  und einer Gesamtladung  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ . ( $r$ -Abhängig)
- (c) Geladene Vollkugel mit einer Ladung  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  für  $r \geq R$ . ( $r$ -Abhängig)
- (d) Unendlich langer, geladener Stab mit Radius  $R$ . Die Ladung pro Längeneinheit sei  $\lambda = \pi R^2 \rho$  ( $r$ -Abhängig)
- (e) Koaxialkabel  
Ein Koaxialkabel entspricht einer Anordnung von einem leitenden Draht mit Radius  $R_1$ , der koaxial von einem dünnen, leitenden Hohlzylinder mit Radius  $R_2$  umgeben ist. Die beiden Leiter mögen die entgegengesetzt gleichen Ladungsdichten pro Längeneinheit  $\lambda_1 = -\lambda_2$  haben.

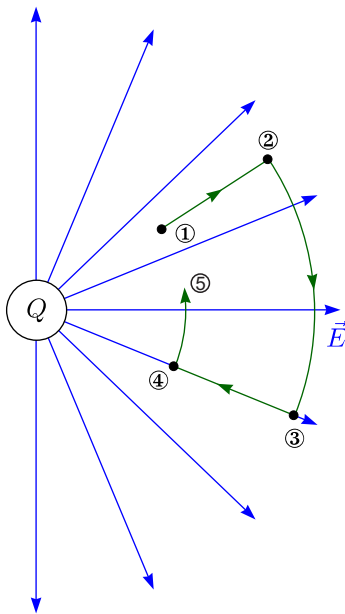


**Virtuelles Rechnen - Aufteilung:** ||1a||1b||2||3||4||5a||5b, c||5d, e

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT  
 Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer  
 Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu  
 Email: Frank.Hartmann@kit.edu  
 www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm

**Zusatz - freiwillige - wird im Tutorium auf Wunsch besprochen:**

**1. Wegintegrale im Coulombfeld; es gilt (Begründung)**



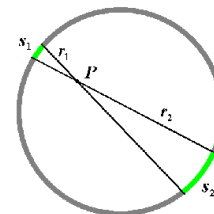
- (a) Die verrichtete Arbeit entlang des Weges 1 - 5 ist gleich Null
- (b) Die verrichtete Arbeit entlang des Weges 1 - 5 - 1 ist gleich Null
- (c) Die Arbeit entlang jedes Weges mit demselben Start- und Endpunkt ist Null
- (d) Die Arbeit von  $1 \rightarrow 2$  ist  

$$W = +q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$
- (e) Die Arbeit von  $2 \rightarrow 3$  ist  

$$W = +q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2}$$
- (f)  $W = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$

**2. Feldstärke im Innern eines Ladungsringes**

Ein Ring mit dem Radius  $R$  trage eine homogene, positive Linienladungsdichte  $\lambda$ . Die Abbildung zeigt einen Punkt  $P$  in der Ebene, der aber nicht im Mittelpunkt des Ringes liegt. Betrachten Sie die beiden Ringabschnitte mit den Längen  $s_1$  und  $s_2$  und den Abständen  $r_1$  bzw.  $r_2$  vom Punkt  $P$ .



- (a) Wie ist das Verhältnis der Ladungen dieser Abschnitte? Welche der Ladungen erzeugt ein stärkeres Feld im Punkt  $P$ ?
- (b) Angenommen, das von einer Punktladung erzeugte elektrische Feld ändere sich mit  $\frac{1}{r}$  statt mit  $\frac{1}{r^2}$ . Wie gross wäre dann das in  $P$  von den Ringabschnitten hervorgerufene elektrische Feld?
- (c) Wie würden sich die Ergebnisse bei a) und b) ändern, wenn sich  $P$  innerhalb einer homogen geladenen Kugelschale befände und  $s_1$  sowie  $s_2$  Flächenelemente wären?