

Hilfe für die Bachelorprüfung in Moderner Experimentalphysik bei Professor Husemann

Marius Sulzer

Prüfung gehalten am
08.09.2017

Inhaltsverzeichnis

I Einführung	1
II Povh-Zusammenfassung	2
1 Geometrische Gestalt der Kerne	2
1.1 Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt	2
1.2 Der Mott-Wirkungsquerschnitt	3
1.3 Formfaktoren der Kerne	3
2 Elastische Streuung am Nukleon	5
2.1 Formfaktoren des Nukleons	5
2.2 Quasielastische Streuung	7
2.3 Zusammenfassung der Streuungen	7
3 Quarks, Gluonen und starke Wechselwirkung	7
3.1 Quarkstruktur der Nukleonen	7
3.2 Quarks in Hadronen	8
3.2.1 Baryonen	8
3.2.2 Mesonen	8
3.3 Quark-Gluon-Wechselwirkung	8
3.3.1 Farbe	8
3.3.2 Gluonen	9
3.3.3 Hadronen als farbneutrale Objekte	9
3.3.4 Die starke Kopplungskonstante α_s	9
4 Teilchenerzeugung in e^+e^--Kollisionen	9
4.1 Erzeugung von Leptonpaaren	10
4.2 Resonanzen	11
5 Phänomenologie der schwachen Wechselwirkung	11
5.1 Leptonenzahlerhaltung	11
5.2 Typen der schwachen Wechselwirkung	11
5.2.1 Geladene Ströme	12
5.3 Kopplungsstärke des geladenen Stroms usw.	13
5.4 Paritätsverletzung	13
6 Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung	13
6.1 Die elektroschwache Vereinheitlichung und der schwache Isospin	13
7 Das Standardmodell	14
8 Quarkonia	14

III Einleitung - P-Verletzung und CP-Verletzung	15
9 P-Verletzung	15
9.1 Theta-Tau-Rätsel	15
9.2 Wu-Experiment	15
9.2.1 Experimentelle Herausforderung des Wu-Experiments	16
9.3 Goldhaber-Experiment	17
9.3.1 Bestimmung der Flugrichtung des Neutrinos	17
9.3.2 Bestimmung der Helizität des Neutrinos	18
10 Zerfall des neutralen Kaons - CP-Verletzung	19
10.1 Mischung von K^0 und \bar{K}^0	19
10.2 CP-Erhaltung	20
10.3 CP-Verletzung	21
IV Schalenmodell und Kernpotential	22
11 Das Schalenmodell des Kerns	22
12 Magische Zahlen	23
13 Kernpotential	23
V Modell der Quasifreien Elektronen	24
14 Bloch-Funktion	24
15 Näherung für quasi-freie Elektronen	25
VI Josephson-Kontakte und SQUIDs	28
16 Makroskopische Wellenfunktion	28
17 Josephson-Kontakte	28
18 SQUID	29

Teil I

Einführung

Hallo zusammen,

da ich weiß wie ätzend das Lernen auf die mündlichen Prüfungen ist, versuche ich euch mit den Unterlagen zu helfen, die ich ohnehin getext habe. Ich selbst hatte meine mündliche Bachelorprüfung am 08.09.2017 bei Professor Husemann. Im Folgenden folgt eine kleine Zusammenfassung des Lehrbuchs nach Bogdan Povh, jedenfalls soweit wie ich Lust hatte. Dann habe ich euch mein Einstiegsthema angehängt, dass ich ziemlich genau so präsentiert habe. Danach kommen noch ein paar verstreute Themen, mit denen ich nicht so ganz Freund wurde und die ich daher nochmal genauer formuliert habe.

Alle Regeln des guten wissenschaftlichen Schreibens sind natürlich in den Wind geschossen worden und ich übernehme auch bestimmt keine Haftung für irgendetwas, das hier drin steht.

Euch wünsche ich ein erfolgreiches Lernen und eine gute Prüfung.

Liebe Grüße
Marius

Teil II

Povh-Zusammenfassung

1 Geometrische Gestalt der Kerne

Die Frage nach der Größe und der Gestalt der Atomkerne kann mit Hilfe von Streuversuchen beantwortet werden. In der Praxis ist dies jedoch beispielsweise bei der Streuung von Protonen oder α -Teilchen problematisch, da erstens diese Teilchen selbst ausgedehnt sind und der Wirkungsquerschnitt daher sowohl die Struktur des Projektils als auch des Targets widerspiegelt, und zweitens die Kernkräfte, die zwischen Projektil und Target wirken, kompliziert und nicht sehr gut bekannt sind. Für die Untersuchung kleiner Objekte ist die Streuung von Elektronen besonders gut geeignet. Elektronen sind, soweit wir wissen, punktförmige Teilchen ohne innere Struktur. Die Wechselwirkung zwischen einem Elektron und dem Kern, Nukleon oder Quark erfolgt über den Austausch eines virtuellen Photons, der sich mit Hilfe der Quantenelektrodynamik (QED) exakt berechnen lässt. Es handelt sich also um die wohlbekanntelektromagnetische Wechselwirkung, deren Kopplungskonstante $\alpha = \frac{1}{137}$ wesentlich kleiner als Eins ist, was bedeutet, dass Korrekturen höherer Ordnung nur eine geringe Rolle spielen. Im Folgenden wird der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons der Energie E an einem Atomkern mit der Ladung Ze betrachtet.

1.1 Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt

Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt gibt den Wirkungsquerschnitt unter Vernachlässigung des Spins an, wobei der Rückstoß vernachlässigt wird. Dabei lautet die **klassische Rutherford-Streufornel**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot (4E_{\text{kin}})^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.1)$$

Projektil Teilchen der Ladung ze und der kinetischen Energie E_{kin}

Target Kern der Ladung Ze

Definiert man den *Impulsübertrag* \vec{q} als

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}', \quad (1.2)$$

wobei \vec{p} der Impuls des einfallenden Teilchens und \vec{p}' der Impuls desselben Teilchens nach der Streuung darstellt, so lässt sich der Wirkungsquerschnitt auch schreiben als

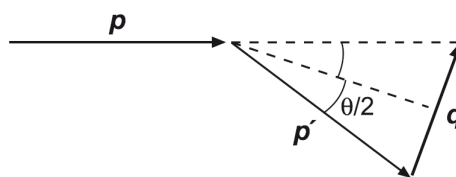
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{4zZ\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q}c|^4}. \quad (1.3)$$

Diese $\frac{1}{\vec{q}^4}$ -Abhängigkeit des elektromagnetischen Streuquerschnitts macht es außerordentlich schwierig, Ereignisse mit großen Impulsüberträgen zu messen, weil die Zählrate stark abnimmt und kleine Fehler in der Messung von \vec{q} die Ereignisse erheblich verfälschen.

Da bei der Rutherford-Streuung der Rückstoß vernachlässigt werden kann, ist die Energie des Elektrons sowie der Betrag des Impulses vor und nach der Wechselwirkung gleich:

$$E = E' \quad |\vec{p}| = |\vec{p}'|. \quad (1.4)$$

Der Betrag des Impulsübertrages \vec{q} ist dann



$$|\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.5)$$

Unter Beachtung von

$$E \approx \vec{p}c \quad \text{falls} \quad E \geq mc^2 \quad (1.6)$$

folgt die **relativistische Rutherford-Streuformel**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{zZ\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.7)$$

1.2 Der Mott-Wirkungsquerschnitt

Der Mott-Wirkungsquerschnitt berücksichtigt nun den Spin von Elektron und Target, vernachlässigt aber ebenfalls den Rückstoß des Kerns (deshalb das Sternchen).

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left[1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (1.8)$$

Im Grenzfall $\beta \rightarrow 1$ kann man die Formel vereinfachen zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.9)$$

Hieraus kann man schließen, dass eine Streuung um einen Winkel von 180° bei einem spinlosen Target nicht möglich ist. Dies folgt aus der *Helizitätserhaltung*. Die Helizität h ist die Projektion des Spins \vec{s} auf die Bewegungsrichtung $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$:

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}. \quad (1.10)$$

Teilchen mit Spin in Bewegungsrichtung haben die Helizität $+1$, solche mit Spin entgegen der Bewegungsrichtung die Helizität -1 . Aufgrund der Helizitätserhaltung müsste sich bei einer Streuung um 180° auch die Spinprojektion umkehren. Dies ist jedoch bei einem spinlosen Target aufgrund der Drehimpulserhaltung nicht möglich.

1.3 Formfaktoren der Kerne

Bei Streuexperimenten an Kernen oder Nukleonen stellt man fest, dass der experimentelle Wirkungsquerschnitt nur im Grenzfall $|\vec{q}| \rightarrow 0$ dem Mott-Wirkungsquerschnitt entspricht; bei größerem $|\vec{q}|$ sind die experimentellen Wirkungsquerschnitte systematisch kleiner. Der Grund hierfür liegt darin, dass Kerne und Nukleonen räumlich ausgedehnt sind. Bei größerem $|\vec{q}|$ sieht das gestreute Elektron nicht mehr die gesamte Ladung der Targets. Die räumliche Ausdehnung des Kerns kann durch einen Formfaktor F beschrieben werden. Wir beschränken uns auf Formfaktoren von kugelsymmetrischen Systemen, in denen es also keine Vorzugsrichtung gibt. Der Formfaktor ist dann nur vom Betrag des Impulsübertrags \vec{q} abhängig, was wir dadurch symbolisieren, dass wir den Formfaktor als $F(\vec{q}^2)$ schreiben. Experimentell wird der Betrag des Formfaktors bestimmt durch das Verhältnis zwischen dem theoretischen Mott-Wirkungsquerschnitt und dem gemessenen Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot |F(\vec{q}^2)|^2. \quad (1.11)$$

Unter gewissen Bedingungen (vernachlässigbarer Rückstoß, Born'sche Näherung) ist der Formfaktor $F(\vec{q}^2)$ die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung $f(\vec{x})$:

$$F(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\vec{x}} f(\vec{x}) d^3x. \quad (1.12)$$

Im Prinzip ließe sich aus dem \vec{q}^2 -Verlauf des experimentell bestimmten Formfaktors durch Fourier-(Rück-)Transformation die radiale Ladungsverteilung ermitteln. In der Praxis kann der Formfaktor aber nur über einen begrenzten Bereich des Impulsübertrages $|\vec{q}|$ gemessen werden, da dieser durch die maximal zur Verfügung stehende Strahlenergie beschränkt ist und außerdem der Wirkungsquerschnitt sehr rasch mit wachsendem Impulsübertrag abfällt. Man wählt daher gewöhnlich verschiedene Parametrisierungen von $f(r)$, bestimmt daraus ein theoretisches $F(\vec{q}^2)$ und variiert dann die Parameter so lange, bis man die beste Übereinstimmung zwischen den Messdaten für $F(\vec{q}^2)$ und der Modellfunktion erhält. Beispiele für radiale Ladungsverteilungen und die dazu gehörigen Formfaktoren sind in Abbildung 1 gegeben.

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(\mathbf{q}^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + \mathbf{q}^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-\mathbf{q}^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha = \mathbf{q} R/\hbar$	oszillierend

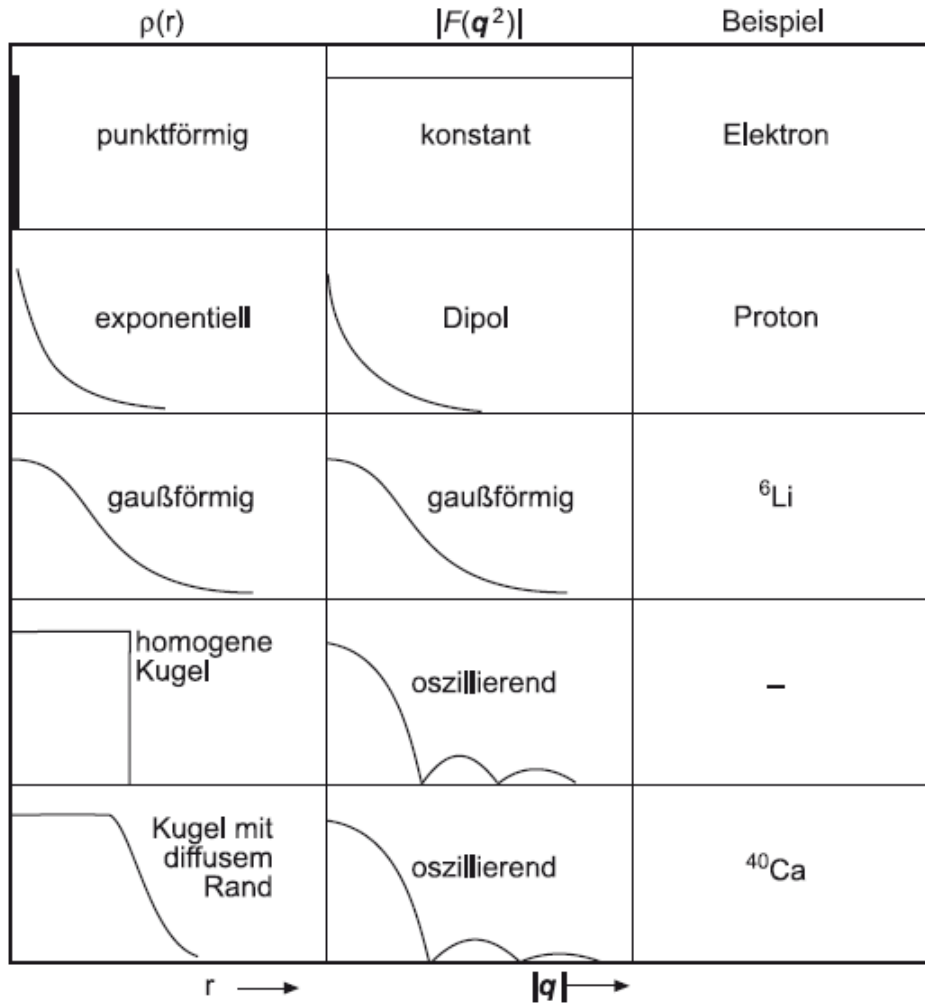


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor in Born'scher Näherung.

2 Elastische Streuung am Nukleon

2.1 Formfaktoren des Nukleons

Streut man Elektronen elastisch an den leichtesten Kernen Wasserstoff und Deuterium, so kann man Informationen über die Kernbausteine Proton und Neutron gewinnen. Allerdings müssen dabei einige Dinge beachtet werden:

Rückstoß Die radiale Ausdehnung der Nukleonen beträgt etwa 0,8 fm, weshalb zur Untersuchung Energien von einigen hundert MeV bis GeV benötigt werden. Da die Masse der Nukleonen in dieser Größenordnung liegt ($M \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c_0^2}$), kann der Rückstoß nicht mehr vernachlässigt werden. Dies führt zu einem zusätzlichen Faktor im Mott-Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot \frac{E'}{E}. \quad (2.1)$$

Da der Energieverlust des Elektrons durch den Rückstoß nicht mehr vernachlässigt werden kann, ist es sinnvoller, den Dreierimpulsübertrag als Viererimpulsübertrag zu schreiben, dessen Quadrat eine Lorentz-Invariante ist:

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}||\vec{p}'| \cos\theta \right) \approx \frac{-4EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.2)$$

Um nur mit positiven Größen zu arbeiten, definieren wir

$$Q^2 = -q^2. \quad (2.3)$$

Im Mott-Wirkungsquerschnitt muss \vec{q}^2 durch q^2 oder Q^2 ersetzt werden.

Magnetisches Moment Man muss zusätzlich zur Wechselwirkung zwischen Ladung von Elektron und Kern auch die Wechselwirkung zwischen dem Strom des Elektrons und dem magnetischen Moment des Nukleons berücksichtigen. Das magnetische Moment für ein geladenes Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ohne innere Struktur (Dirac-Teilchen) ist durch

$$\mu = g \cdot \frac{e}{2M} \cdot \frac{\hbar}{2} \quad (2.4)$$

gegeben, wobei M die Masse des Teilchens und $g = 2$ ist. Die magnetische Wechselwirkung ist mit einem Umklappen des Nukleonspins verbunden, wobei aufgrund der Drehimpuls- und Helizitätserhaltung eine Streuung um 180° favorisiert wird. Der zusätzliche Term lautet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{magn WW}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.5)$$

mit

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}. \quad (2.6)$$

Der Vorfaktor 2τ folgt daraus, dass das Matrixelement der Wechselwirkung proportional zum magnetischen Moment des Nukleons ist ($\propto \frac{1}{M}$) und zum Magnetfeld, das beim Streuprozess am Ort des Targets erzeugt wird und nach zeitlicher Integration proportional zur Ablenkung des Elektrons (und damit zum Impulsübertrag Q) ist. In den Wirkungsquerschnitt gehen diese Größen quadratisch ein. Aufgrund des Zusatzterms fällt der Wirkungsquerschnitt zu großen Streuwinkeln hin weniger stark ab und man erhält eine isotropere Verteilung als im rein elektrischen Fall.

Anomales magnetisches Moment Für geladene Dirac-Teilchen sollte der g -Faktor den Wert 2 annehmen; für ungeladene Dirac-Teilchen muss hingegen das magnetische Moment verschwinden. Da die Nukleonen jedoch keine Dirac-Teilchen, sondern aus Quarks aufgebaut sind, ergeben sich ihre g -Faktoren aus ihrer Substruktur. Die gemessenen Werte betragen

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \mu_N = +2,97 \cdot \mu_N \quad (2.7)$$

$$\mu_n = \frac{g_n}{2} \mu_N = -1,91 \cdot \mu_N \quad (2.8)$$

mit dem *Kernmagneton*

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3,1525 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{T}} \quad (2.9)$$

Die Ladungs- und Stromverteilungen können wie bei den Kernen durch Formfaktoren beschrieben werden. In diesem Fall benötigt man zwei Formfaktoren, die die elektrischen und magnetischen Verteilungen charakterisieren. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Nukleon wird dann durch die **Rosenbluth-Formel** beschrieben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.10)$$

Hier bei sind $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ die *elektrischen und magnetischen Formfaktoren*, die von Q^2 abhängen. Aus der gemessenen Q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren kann man auf die räumliche Verteilung von Ladung und magnetischem Moment rückschließen. Wichtig ist der Grenzfall $Q^2 \rightarrow 0$. In diesem Fall ist G_E gerade gleich der auf die Elementarladung e normierten elektrischen Ladung und G_E gleich dem auf das Kernmagneton normierten magnetischen Moment μ des Targets:

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1 \quad G_E^n(Q^2 = 0) = 0 \quad (2.11)$$

$$G_M^p(Q^2 = 0) = 2,79 \quad G_M^n(Q^2 = 0) = -1,91. \quad (2.12)$$

Um $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ separat bestimmen zu können, muss man den Wirkungsquerschnitt für jeweils feste Werte von Q^2 bei verschiedenen Streuwinkeln θ und damit Strahlenergien E messen. Dividiert man den gemessenen Wirkungsquerschnitt durch den Mott-Wirkungsquerschnitt und trägt die Resultate gegen $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ auf, so liegen die Messpunkte auf einer Geraden. Aus deren Steigung erhält man $G_M(Q^2)$ und aus deren Achsenabschnitt gerade $\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}$ bei $\theta = 0$. Führt man diese Analyse für verschiedene Q^2 -Werte durch, so kann man die Q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren bestimmen.

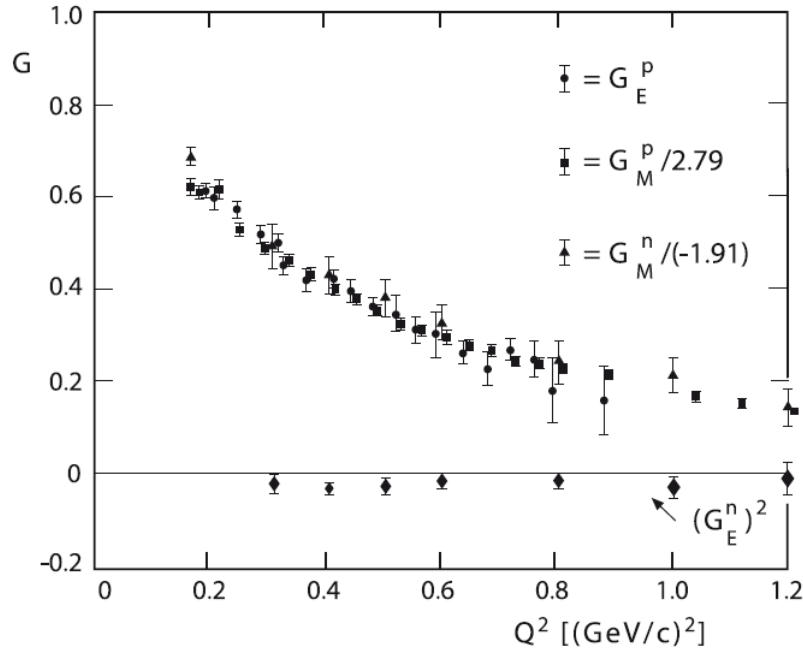


Abbildung 2: Elektrischer und magnetischer Formfaktor von Proton und Neutron, aufgetragen gegen Q^2 . Die Datenpunkte sind mit den angegebenen Faktoren skaliert und liegen dann übereinander, so dass das globale Dipolverhalten deutlich wird.

2.2 Quasielastische Streuung

to be edited

2.3 Zusammenfassung der Streuungen

Rutherford-Wirkungsquerschnitt Vernachlässigung von Spin und Rückstoß

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{zZ\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (2.13)$$

Mott-Wirkungsquerschnitt Vernachlässigung des Rückstoßes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot (1 - \beta^2 \sin^2)\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.14)$$

Formfaktoren der Kerne Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Kerns, Vernachlässigung des Rückstoßes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot |F(\vec{q}^2)|^2. \quad (2.15)$$

Formfaktor des Nukleons Berücksichtigung des Rückstoßes und des magnetischen Momentes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot \underbrace{\frac{E'}{E}}_{\text{Rückstoß}} \cdot \underbrace{\left[1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]}_{\text{magnetisches Moment}}. \quad (2.16)$$

Zusätzlich Berücksichtigung der Ladungs- und Stromverteilung durch elektrische und magnetische Formfaktoren

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot \underbrace{\frac{E'}{E}}_{\text{Rückstoß}} \cdot \underbrace{\left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]}_{\text{magnetisches und anomales magnetisches Moment}}. \quad (2.17)$$

3 Quarks, Gluonen und starke Wechselwirkung

3.1 Quarkstruktur der Nukleonen

Quarks Mit Hilfe der tiefinelastischen Streuung haben wir festgestellt, dass die Nukleonen aus elektrisch geladenen, punktförmigen Teilchen bestehen, den **Quarks**. Die Eigenschaften der Nukleonen (Ladung, Masse, magnetisches Moment, Isospin, etc.) sollte sich aus den Eigenschaften dieser Konstituenten aufbauen und erklären lassen. Da die Quarks Spin $1/2$ tragen und sich ihre Spins im Bild des einfachen Quarkmodells zum Gesamtspin $1/2$ des Nukleons addieren müssen, sind die Nukleonen aus mindestens drei dieser Quarks aufgebaut. Das u- und d-Quark bilden ein Isospindublett, weshalb das Proton und das Neutron ebenfalls ein Isospindublett ($I = \frac{1}{2}$) bilden. Die drittelzahligen Ladungen kommen unter anderem daher, dass Hadronen mit maximal zweifach positiver Ladung (z.B. Δ^{++}) aber nur einfach negativer Ladung (z.B. Δ^-) gefunden wurden.

Valenzquarks und Seequarks Die drei Quarks, die die Quantenzahlen der Nukleonen ausmachen, bezeichnet man als *Valenzquarks* (ähnlich wie Valenzelektronen, die für die chemischen Eigenschaften der Atome zuständig sind). Darüber hinaus existieren noch virtuelle Quark-Antiquark-Paare, die sogenannten *Seequarks*. Ihre effektiven Quantenzahlen verschwinden im Mittel und haben keine Auswirkung auf die Quantenzahlen des Nukleons. Wegen ihrer elektrischen Ladung sind sie aber ebenfalls in der tiefinelastischen Streuung „sichtbar“. Es gibt außer den u- und d-Quarks noch andere Paare weiterer Quarktypen. Man bezeichnet die Typen der Quarks als **Flavours**. Diese Quarks werden s (*strange*), c (*charm*), b (*bottom*) und t (*top*) genannt. Man ordnet die 6 Quarktypen nach steigender Masse in Dupletts (auch *Familien* oder *Generationen* genannt) an:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Quarks der oberen Reihe tragen gerade die Ladungszahl $z_f = +\frac{2}{3}$, die der unteren Reihe $z_f = -\frac{1}{3}$. Die Quarks c, b und t sind so schwer, dass sie bei den erreichbaren Q^2 -Werten der meisten Experimente nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Impulsverteilung der Quarks Es kann gezeigt werden, dass ungefähr die Hälfte des Impulses von Teilchen getragen werden, die weder elektromagnetisch noch schwach wechselwirken. Sie werden mit den **Gluonen** identifiziert.

3.2 Quarks in Hadronen

Neben den Nukleonen gibt es noch eine Vielzahl von instabilen Hadronen, durch deren Studium sich erst die Vielfalt der starken Wechselwirkung erschließt. Hadronen kommen in zwei Klassen vor:

1. Baryonen: halbzahliger Spin \rightarrow Fermionen
2. Mesonen: ganzzahliger Spin \rightarrow Bosonen

3.2.1 Baryonen

Proton und Neutron sind die Baryonen mit der geringsten Masse. Baryonen sind **aus drei Quarks zusammengesetzt**. Wenn in Teilchenreaktionen zusätzliche Baryonen erzeugt werden, dann wird zugleich die gleiche Anzahl von Antibaryonen erzeugt. Zur Beschreibung dieses Phänomens führt man eine neue, additive Quantenzahl ein, die **Baryonenzahl** B . Sie ist soweit bekannt in allen Teilchenreaktionen und -zerfällen eine **Erhaltungsgröße**. Sie beträgt $B = 1$ für alle Baryonen und $B = -1$ für alle Antibaryonen. Dementsprechend wird den Quarks die Baryonenzahl $B = \frac{1}{3}$ und den Antiquarks die Baryonenzahl $B = -\frac{1}{3}$ zugeordnet. Dies bedeutet in letzter Konsequenz, dass die Zahl der Quarks minus die Zahl der Antiquarks erhalten bleibt.

Mehr in Kap.15 im Povh

3.2.2 Mesonen

Die leichtesten Hadronen sind die Pionen. Mit einer Masse von $140 \frac{\text{MeV}}{c_0^2}$ sind sie viel leichter als die Nukleonen. Sie haben den Spin 0 und kommen in den drei Ladungszuständen π^- , π^0 , π^+ vor. Aus diesem Grund folgt, dass **Mesonen aus Quark-Antiquark-Paaren aufgebaut** sind. Die Pionen sind die leichtesten Quarksysteme und können deshalb nur in die noch leichteren Leptonen bzw. in Photonen zerfallen. Die Quarkkomposition der Pionen ist

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle ; |\pi^-\rangle = |\bar{u}d\rangle ; |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \}. \quad (3.1)$$

Mesonen zerfallen in Elektronen, Neutrinos und/oder Photonen; es gibt also keine „Mesonenzahlerhaltung“. Dies ist in sofern plausibel, als dass Mesonen aus Quark-Antiquark-Paaren bestehen und daher die Zahl der Quarks minus die Zahl der Antiquarks immer Null ist. Es können demnach beliebig viele Mesonen erzeugt oder vernichtet werden. Insofern ist es bei den Mesonen lediglich eine Frage der Konvention, ob man sie als Teilchen oder Antiteilchen bezeichnet.

3.3 Quark-Gluon-Wechselwirkung

3.3.1 Farbe

Die Farbe ist eine Eigenschaft der Quarks, die benötigt wird, **um das Pauli-Prinzip für die Quarks in Hadronen zu gewährleisten**. Dies kann man am Beispiel der Δ^{++} -Resonanz, die aus drei u-Quarks besteht, verdeutlichen. Der Spin beträgt $J = \frac{3}{2}$ und die Parität ist positiv. Da das Δ^{++} das leichteste Baryon mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ ist, kann man annehmen, dass der Bahndrehimpuls $l = 0$ beträgt und damit die Ortswellenfunktion symmetrisch ist. Damit sich der Gesamtdrehimpuls $\frac{3}{2}$ ergibt, müssen die Spins aller drei u-Quarks parallel stehen:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^1 u^1 u^1\rangle. \quad (3.2)$$

Die Spinwellenfunktion ist somit ebenfalls symmetrisch. Schließlich ist die Wellenfunktion auch symmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks, weil nur Quarks derselben Sorte vorhanden sind. Damit wäre die Gesamtwellenfunktion symmetrisch, was bei Fermionen gegen das Pauli-Prinzip verstößt.

Mit der neuen Eigenschaft der Farbe, die man sich als eine Art Ladung der Quarks vorstellen kann, kann man das Pauli-Prinzip retten. Jedem Quark kann die Farbe **rot**, **grün** oder **blau** zugeordnet werden. Nun sind die drei Quarks unterscheidbar und die Wellenfunktion ist antisymmetrisch unter Vertauschung.

3.3.2 Gluonen

Die Wechselwirkung, die die Quarks in Form der Hadronen zusammenhält, bezeichnet man als **starke Wechselwirkung**. Unser Vorstellung von fundamentalen Wechselwirkungen ist immer mit einem Teilchenaustausch verbunden. Im Falle der starken Wechselwirkung sind die Austauschteilchen zwischen den Quarks die Gluonen. **Sie koppeln an die Farbladung**. Es gibt 8 Gluonen, die durch ihren Austausch die Wechselwirkung zwischen farbgeladenen Teilchen vermitteln, also nicht nur zwischen den Quarks, sondern auch untereinander. Dies ist ein deutlicher Unterschied zur elektromagnetischen Wechselwirkung, da deren Feldquanten, die Photonen, ungeladen sind und somit nicht aneinander koppeln. Analog zu den elementaren Prozessen der QED (Emission und Absorption von Photonen sowie Paarbildung und Annihilation) gibt es auch in der QCD die Emission und Absorption von Gluonen sowie die Bildung und Annihilation von Quark-Antiquark-Paaren. Zusätzlich gibt es jedoch auch die Kopplung von drei und vier Gluonen untereinander.

3.3.3 Hadronen als farbneutrale Objekte

Man beobachtet trotz der Farbe als zusätzlichen Freiheitsgrad jeweils nur eine Sorte von π^- , p , Δ^0 etc. Aus diesem Grund muss jedes dieser Objekte eine wohldefinierte Farbe tragen, weshalb als zusätzliche Bedingung eingeführt wird, dass als freie Teilchen nur **Teilchen ohne Nettofarbe** existieren dürfen. Damit lässt sich erklären, warum Quarks bisher nicht als freie Teilchen beobachtet wurden. Man kann kein Quark aus einem Hadron auslösen ohne, dass zwei farbgeladene Teilchen entstehen. Dieses Phänomen nennt man auch *Confinement* (*to confine* = einsperren). Das Potential muss demnach bei großen Abständen zu beliebig großen Werten anwachsen - ein krasser Unterschied zum Coulombpotential. Dieses Phänomen begründet man mit der Wechselwirkung der Gluonen untereinander. **Die Reichweite der starken Wechselwirkung ist begrenzt.**

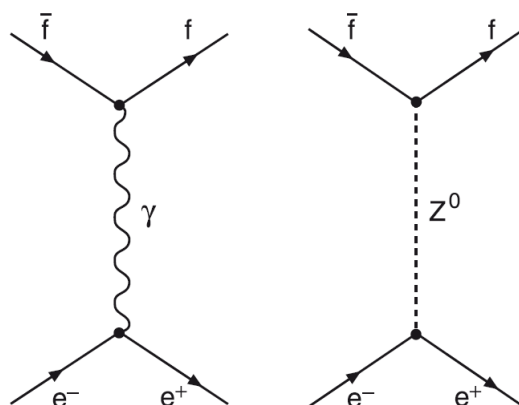
3.3.4 Die starke Kopplungskonstante α_s

Die Kopplungskonstante beschreibt in der Quantenfeldtheorie die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen und hängt effektiv von Q^2 ab. Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung ist diese Abhängigkeit sehr gering, bei der starken Wechselwirkung hingegen sehr stark. Dies liegt daran, dass die Gluonen als Feldquanten der starken Wechselwirkung selbst Farbe tragen und daher auch an andere Gluonen koppeln können. In erster Ordnung Störungsrechnung der QCD erhält man:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet n_f die Anzahl der beteiligten Quarktypen. Da virtuelle Quark-Antiquark-Paare aus schweren Quarks nur eine sehr geringe Lebensdauer haben, ist ihr Abstand so klein, dass sie erst bei sehr großen Werten von Q^2 aufgelöst werden können. Deshalb ist n_f von Q^2 abhängig und liegt zwischen 3 und 6. Der Parameter Λ ist der einzige freie Parameter der QCD und muss im Vergleich von Messungen bestimmt werden. Damit Störungsrechnung in der QCD sinnvoll angewendet werden kann, muss $\alpha_s \ll 1$ sein. Die Q^2 -Abhängigkeit entspricht einer Abhängigkeit vom inversen Abstand. Für sehr kleine Abstände, also große Werte von Q^2 , wird die Kopplung der Quarks untereinander kleiner und verschwindet asymptotisch, so dass die Quarks im Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ als „frei“ angesehen werden können. Man bezeichnet dies als **asymptotische Freiheit**. Umgekehrt wächst die Kopplungsstärke bzw. die Bindung zwischen den Quarks bei großen Abständen so stark an, dass einzelne Quarks nicht aus dem Hadron entfernt werden können (Confinement).

4 Teilchenerzeugung in e^+e^- -Kollisionen



Bei der Kollision der relativ leicht zu erzeugenden Elektronen und Positronen können alle elektromagnetisch und schwach wechselwirkenden Teilchen erzeugt werden, sofern die Energie der Teilchenstrahlen hoch genug ist. In der elektromagnetischen Wechselwirkung annihilieren Elektron und Positron in ein virtuelles Photon, das sofort wieder in ein Paar geladener Elementarteilchen zerfällt. In der schwachen Wechselwirkung ist das Austauschteilchen das schwere **Vektorboson** Z^0 . Das Symbol f steht für ein elementares Fermion (Quark oder Lepton) und \bar{f} für sein Antiteilchen. Das $f\bar{f}$ -System muss die Quantenzahlen des Photons bzw. des Z^0 tragen. Mit dieser Reaktion **können alle fundamentalen geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden**. Da Neutrinos elektrisch ungeladen sind, können Neutrino-Antineutrino-Paare nur durch Z^0 -Austausch erzeugt werden.

Welche Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden können, hängt nur von der Energie der Elektronen und Positronen ab. In einem Speicherring kreisen Elektronen und Positronen mit derselben Energie E in gegenläufigem Sinne und kollidieren frontal miteinander. Es ist üblich die lorentzinvariante Energievariable s einzuführen, das **Quadrat der Schwerpunktsenergie**:

$$s = (p_1 c + p_2 c)^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 c^2. \quad (4.1)$$

In einem Speicherring mit kollidierenden Teilchen der Energie E gilt

$$s = 4E^2. \quad (4.2)$$

Damit können Teilchen-Antiteilchen-Paare mit Massen bis $2m = \frac{\sqrt{s}}{c^2}$ erzeugt werden. Um neue Teilchen zu finden, erhöht man die Speicherringenergie und sucht nach einem Anwachsen der Reaktionsrate bzw. nach Resonanzen im Wirkungsquerschnitt. Der große Vorteil von Experimenten mit kollidierenden Strahlen besteht darin, dass die gesamte Energie im Schwerpunktsystem zur Verfügung steht. Bei Experimenten mit ruhendem Target der Masse m ist hingegen im Falle von $mc^2 \ll E$

$$s \approx 2mc^2 \cdot E. \quad (4.3)$$

Die Schwerpunktsenergie wächst dann also nur mit der Wurzel der Strahlenergie.

4.1 Erzeugung von Leptonpaaren

Bevor wir uns der Erzeugung schwerere Quarks zuwenden, wollen wir zunächst die Leptonen betrachten. Leptonen sind elementare Spin-1/2-Teilchen, die der schwachen und, falls sie geladen sind, der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen, **nicht aber der starken Wechselwirkung**.

Myonen Die leichtesten geladenen Teilchen, die in Elektron-Positron-Reaktionen erzeugt werden können, sind Myonen:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-. \quad (4.4)$$

Das Myon μ^- und sein Antiteilchen μ^+ haben jeweils eine Masse von $150,7 \frac{\text{MeV}}{c^2}$. Sie durchdringen Materie sehr leicht, während Elektronen aufgrund ihrer geringen Masse und Hadronen aufgrund der starken Wechselwirkung nur eine geringe Reichweite haben. Damit kann man Myonen der kosmischen Strahlung auch noch tief unter der Erde detektieren. Mit ca. $2\mu\text{s}$ haben Myonen **nach dem Neutron die längste Lebensdauer aller instabilen Elementarteilchen**. Sie sind daher leicht zu messen und werden oft als Referenz für andere Messungen verwendet.

Tau-Leptonen Ist die Schwerpunktsenergie der e^+e^- -Reaktion ausreichend hoch, so kann ein weiteres Leptonpaar erzeugt werden, das τ^- und das τ^+ . Diese Teilchen sind mit $3 \cdot 10^{-13}$ s wesentlich kurzlebiger. Daher können sie im Detektor nur über ihre Zerfallsprodukte nachgewiesen werden. Möglich sind u.a. schwache Zerfälle in Myonen oder Elektronen.

Der Wirkungsquerschnitt der Erzeugung von Myonpaaren ist deutlich einfacher zu Berechnen, als der der Paarerzeugung oder Streuung. Der differentielle Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (\hbar c)^2 \cdot (1 + \cos^2 \theta). \quad (4.5)$$

Durch Integration über den Raumwinkel Ω erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} (\hbar c)^2, \quad (4.6)$$

und es ergibt sich

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = 21,7 \frac{\text{nbarn}}{(E^2/\text{GeV}^2)}. \quad (4.7)$$

Die Plausibilitätsbetrachtung von Gleichung 4.6 ist im Povh auf Seite 121 zu finden.

Interessant zu beobachten ist, dass bei einer sehr hohen Schwerpunktsenergie \sqrt{s} , wodurch die unterschiedlichen Ruhemassen von μ und τ vernachlässigt werden können, die Wirkungsquerschnitte für $\mu^+\mu^-$ - und $\tau^+\tau^-$ -Erzeugung identisch sind. Man spricht daher auch von der **Leptonenuniversalität** und meint damit, dass sich Elektron, Myon und Tau, abgesehen von ihrer Masse und den damit verbundenen Effekten, in allen Reaktionen gleich verhalten. Myon und Tau werden gewissermaßen als schwerere Kopien des Elektrons angesehen. Da Gleichung 4.7 den experimentellen Wirkungsquerschnitt gut beschreibt, ist der Formfaktor von μ und τ Eins, was einem punktförmigen Teilchen entspricht. Bis heute hat man keine Anzeichen für eine räumliche Ausdehnung der Leptonen feststellen können. Für das Elektron liegt die obere Grenze bei 10^{-18} m.

4.2 Resonanzen

to be edited, S. 123ff im Povh

5 Phänomenologie der schwachen Wechselwirkung

Die schwache Wechselwirkung ist für den Zerfall von Quarks und Leptonen verantwortlich. Es sind im Gegensatz zu sämtlichen anderen Wechselwirkungen keine gebundenen Zustände bekannt, die sich aufgrund der schwachen Wechselwirkung bilden. In Streuexperimenten ist die schwache Wechselwirkung nur schwer beobachtbar, da Reaktionen von Teilchen, die ausschließlich der schwachen Wechselwirkung unterliegen (Neutrinos), nur extrem geringe Wirkungsquerschnitte haben. Bei Streuexperimenten mit geladenen Leptonen und Hadronen werden die Effekte der schwachen Wechselwirkung in der Regel von der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung überdeckt. So stammen die meisten Informationen über die schwache Wechselwirkung von Teilchenzerfällen. Wichtige Meilensteine bei der Erforschung der schwachen Wechselwirkung sind der β -Zerfall, die Entdeckung der Paritätsverletzung der unterschiedlichen Neutrinofamilien und der CP-Verletzung im K^0 -System.

5.1 Leptonenzahlerhaltung

Bei allen Reaktionen ist die Erzeugung oder Vernichtung eines Leptons immer mit der Erzeugung bzw. Vernichtung eines Antileptons der gleichen Familie gekoppelt. Es gilt: Bei allen Reaktionen bleibt die Zahl der Leptonen einer Familie abzüglich der Zahl der Antileptonen erhalten:

$$L_l = N(l) - N(\bar{l}) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l) = \text{const.} \quad \text{für } l = e, \mu, \tau. \quad (5.1)$$

Man nennt die Summe $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ die **Leptonenzahl** und die einzelnen L_l die **Leptonenfamilienzahlen**. Jede dieser drei Zahlen L_e, L_μ und L_τ bleibt separat nur in jedem Wechselwirkungsquerschnitt erhalten! Wegen der Oszillation bleibt im Fluge nur die Gesamtleptonzahl L erhalten.

5.2 Typen der schwachen Wechselwirkung

Es sind folgende schwache Reaktionen möglich:

1. geladene Leptonen werden in die zugehörigen Neutrinos der gleichen Familie umgewandelt bzw. ein geladenes Lepton und ein Antineutrino (oder ihre jeweiligen Antiteilchen) der gleichen Familie können erzeugt werden
2. Quarks eines Flavours können in solche eines anderen Flavours überführt werden (z.B. d-Quark in ein u-Quark)

Bei allen diesen Prozessen ändert sich die Identität der Quarks und Leptonen und damit die Ladung um $+1e$ oder $-1e$. Für diesen Typ der Wechselwirkung wurde der Begriff des **geladenen Stromes** geprägt. Sie wird durch geladene Teilchen, W^+ und W^- , vermittelt.

Darüber hinaus kann die schwache Wechselwirkung auch durch den Austausch des elektrisch neutralen Z^0 -Teilchens erfolgen. Hierbei bleiben die Quarks und Leptonen unverändert. Man spricht von **neutralen Strömen**.

Die W^\pm - und Z^0 -Teilchen sind Vektorbosonen, also Spin-1-Teilchen. Sie haben eine große Masse von $80 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ (W^\pm) bzw. $91 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ (Z^0).

5.2.1 Geladene Ströme

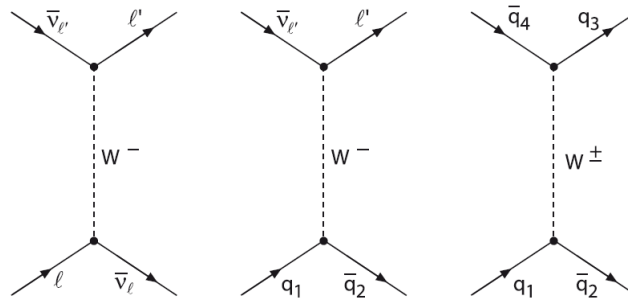


Abbildung 3: Die drei typen von Reaktionen mit geladenem Strom: leptonischer Prozess (links), semileptonischer Prozess (mitte), nichtleptonischer Prozess (rechts).

Leptonische Prozesse Wenn das W-Boson nur an Leptonen koppelt, spricht man von leptonischen Prozessen. Die elementare Reaktion ist

$$l + \bar{\nu}_l \leftrightarrow l' + \bar{\nu}_{l'}. \quad (5.2)$$

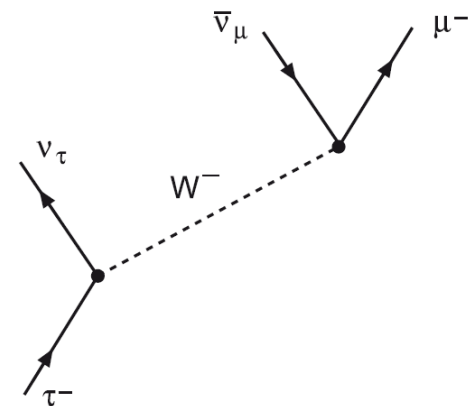
Beispiele hierfür sind der leptonische Zerfall des τ -Leptons

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad (5.3)$$

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad (5.4)$$

und der Streuprozess

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e. \quad (5.5)$$



Semileptonische Prozesse Als semileptonische Prozesse bezeichnet man solche, bei denen das ausgetauschte W-Boson an Leptonen und Quarks koppelt. Die elementare Reaktion ist

$$q_1 + \bar{q}_2 \leftrightarrow l + \bar{\nu}_l. \quad (5.6)$$

Beispiele hierfür sind der Zerfall des geladenen Pions, derjenige des K^- oder der β -Zerfall des Neutrons:
 im Hadronenbild im Quarkbild

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

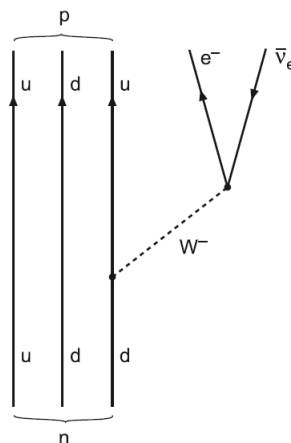
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$d + \bar{u} \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$s + \bar{u} \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

Wie zu erkennen ist, kann man den β -Zerfall des Neutrons auf den Zerfall eines d-Quarks reduzieren, wobei die beiden anderen Quarks unbeteiligt sind. Man bezeichnet sie als *Zuschauerquarks* (*spectator quarks*).



Nichtleptonische Prozesse Die nichtleptonischen Prozesse finden ohne Beteiligung von Leptonen statt. Die elementare Reaktion ist

$$q_1 + \bar{q}_2 \leftrightarrow q_3 + \bar{q}_4. \quad (5.7)$$

Aufgrund der Ladungserhaltung können nur solche Quarks kombiniert werden, deren Gesamtladung $\pm 1e$ beträgt. Beispiele sind hadronische Zerfälle von Baryonen und Mesonen mit Strangeness, wie der Zerfall des Λ^0 -Hyperons in ein Nukleon und ein Pion oder des K^+ ($u\bar{s}$ in zwei Pionen).

5.3 Kopplungsstärke des geladenen Stroms usw.

to be edited, Povh S. 141ff

5.4 Paritätsverletzung

Reaktionen der schwachen Wechselwirkung sind **nicht spiegelsymmetrisch**. Ein Beispiel für eine Größe, die sich bei einer Raumspiegelung ändert, ist die *Helizität*

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}. \quad (5.8)$$

Im Zähler steht ein Skalarprodukt aus einem Axialvektor (Spin) und einem Vektor (Impuls). Während der Spin bei einer Raumspiegelung seine Richtung beibehält, dreht sich die Richtung des Impulses um. Damit handelt es sich bei der Helizität um einen Pseudoskalar, der bei Anwendung des Paritätsoperators sein Vorzeichen ändert. Eine Wechselwirkung, die von der Helizität abhängt, ist daher nicht invariant gegenüber einer Spiegelung im Raum.

Allgemein gilt, dass wenn eine Wechselwirkung paritätserhaltend sein soll, also gleichermaßen an rechts- und linkshändige Teilchen koppeln soll, so muss sie rein vektoriell oder rein axial sein. Bei einer paritätsverletzenden Wechselwirkung hingegen hat das Matricelement sowohl einen Vektoranteil als auch einen Axialvektoranteil, deren Stärken durch zwei Koeffizienten c_V und c_A beschrieben werden. Je weniger sich die beiden Anteile im Betrag unterscheiden, desto stärker wird die Parität verletzt. Man spricht von *maximaler Paritätsverletzung*, wenn beide Beiträge betragsmäßig gleich groß sind. Eine V+A-Wechselwirkung, also eine Summe aus gleichstarkem Vektor- und Axialanteil ($c_V = c_A$), **koppelt ausschließlich an rechtshändige Fermionen und linkshändige Antifermionen**, eine V-A-Wechselwirkung ($c_V = -c_A$) nur an linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen.

Man kann bei Betrachtung der Winkelverteilung der Elektronen, die beim Zerfall polarisierter Myonen entstehen, sehen, dass die Kopplungsstärke von W-Bosonen an Leptonen experimentell $c_V = -c_A = 1$. Die Parität ist maximal verletzt. Wenn durch W-Austausch ein Neutrino oder Antineutrino erzeugt wird, hat das Neutrino negative und das Antineutrino positive Helizität. In der Tat sind alle Experimente damit konsistent, dass **Neutrinos stets linkshändig und Antineutrinos stets rechtshändig** sind. Für massebehaftete Teilchen müssen die obigen Betrachtungen modifiziert werden.

C-Verletzung Man kann leicht sehen, dass durch die festgelegte Helizität der Neutrinos zugleich die *C-Parität* („Ladungskonjugation“) verletzt ist. Die Anwendung des C-Paritätsoperators ersetzt alle Teilchen durch ihre Antiteilchen. Linkshändige Neutrinos würden zu linkshändigen Antineutrinos werden, die aber in der Natur nicht vorkommen. Physikalische Prozesse mit Neutrinos und überhaupt alle schwachen Prozesse verletzen daher von vorne herein die C-Parität.

CP-Erhaltung Die kombinierte Anwendung von Raumspiegelung (P) und Ladungskonjugation (C) hingegen liefert einen physikalisch möglichen Prozess, da dabei linkshändige Fermionen zu rechtshändigen Antifermionen werden und diese in gleicher Stärke wechselwirken.

6 Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung

6.1 Die elektroschwache Vereinheitlichung und der schwache Isospin

Die Eigenschaften des Z^0 -Bosons finden eine ästhetische Beschreibung in der Theorie der **elektroschwachen Wechselwirkung**. In diesem von *Salam* und *Weinberg* entwickelten Rahmen können die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung als zwei Aspekte einer einheitlichen Wechselwirkung aufgefasst werden.

Der Formalismus der elektroschwachen Wechselwirkung kann elegant formuliert werden, indem man analog zum Isospin formalismus der starken Wechselwirkung eine neue Quantenzahl einführt, den **schwachen Isospin T**. Jede Familie von linkshändigen Quarks und Leptonen bildet ein Duplett von Fermionen, die sich durch Emission bzw. Absorption von W-Bosonen ineinander umwandeln können. Die elektrische Ladung $z_f \cdot e$ der beiden Fermionen unterscheidet sich dabei gerade um eine Einheit. Man schreibt ihnen den schwachen Isospin $T = \frac{1}{2}$ und die

	Fermionmultipletts			T	T_3	z_f
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	1/2	+1/2 -1/2	0 -1
	e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	1/2	+1/2 -1/2	+2/3 -1/3
	u_R	c_R	t_R	0	0	+2/3
	d_R	s_R	b_R	0	0	-1/3

Abbildung 4: Multipletts der elektroschwachen Wechselwirkung. Dupletts des schwachen Isospins T sind durch Klammern zusammengefasst. Die elektrische Ladung der beiden Zustände in jedem Duplett unterscheidet sich jeweils um eine Einheit. Das Vorzeichen der dritten Komponente T_3 ist so definiert, dass die Differenz $z_f - T_3$ innerhalb eines Dupletts konstant ist.

dritte Komponente $T_3 = \pm \frac{1}{2}$ zu. Für die rechtshändigen Antifermionen kehrt sich das Vorzeichen von T_3 und z_f um. Rechtshändige Fermionen (und linkshändige Antifermionen) koppeln hingegen nicht an die W-Bosonen und werden deshalb als Singulett ($T = T_3 = 0$) beschrieben. Die linkshändigen Leptonen und die (Cabibbo-rotierten) linkshändigen Quarks jeder Familie bilden also zwei Dupletts; daneben gibt es drei Singulett aus rechtshändigen Fermionen.

7 Das Standardmodell

Ein sehr wichtiges Kapitel im Povh, das den gesamten obigen Abschnitt resümiert. Es ist zu finden auf S. 173-176.

8 Quarkonia

Im Folgenden werden wir uns mit gebundenen hadronischen Systemen befassen. Am einfachsten lassen sich schwere, stark wechselwirkende Quark-Antiquark-Paare ($c\bar{c}$ und $b\bar{b}$) beschreiben, die man als *Quarkonia* bezeichnet. Wegen ihrer großen Masse können sie näherungsweise nichtrelativistisch behandelt werden. Die up-, down- und strange-Quarks bilden aufgrund ihrer geringeren Masse Systeme, die nicht nur aus einem Quark-Typ bestehen. Die Dauer zur Bildung des hypothetischen „Toponiums“ dauert dagegen so lange, dass die Top-Quarks bis dahin bereits zerfallen sind.

Teil III

Einleitung - P-Verletzung und CP-Verletzung

9 P-Verletzung

9.1 Theta-Tau-Rätsel

Lange Zeit wurde angenommen, dass die Parität in allen Wechselwirkungen erhalten ist. 1950 wurden zwei Teilchen mit Strangeness entdeckt (θ^+ und τ^+). Die Teilchen werden beide über die starke Wechselwirkung in der kosmischen Höhenstrahlung produziert, haben die gleiche Masse ($493,7 \frac{\text{MeV}}{c_0^2}$) und Lebensdauer ($1,24 \cdot 10^{-8}$ s). Sie zerfallen beide schwach (Strangeness verletzt) in Endzustände **unterschiedlicher Parität**:

$$\theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (\mathcal{P} = +1) \quad (9.1)$$

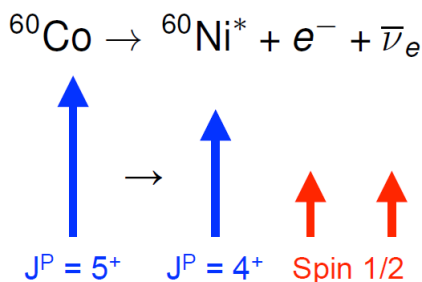
$$\tau^+ \longrightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \end{cases} \quad (\mathcal{P} = -1) \quad (9.2)$$

Unter der Annahme, dass die Parität erhalten ist, müsste es sich um zwei unterschiedliche Teilchen handeln. Wäre die Parität nicht erhalten (und das ist sie bei der schwachen Wechselwirkung nicht), dann kann man die beiden zu einem Teilchen zusammenfügen, dem K^+ . Dieses entsteht wie bereits gesagt aus der kosmischen Höhenstrahlung. Dabei annihilieren ein Proton und ein Antiproton zu einem Strange-Antistrange-Paar, welches aus dem Vakuum ein Up-Antiup-Paar erhält und dadurch positive und negative Kaonen bildet. Eine Bildung aus Pionen ist nicht möglich aufgrund des Massendefizits.

1956 postulierten *Lee* und *Yang*, dass die Parität bei der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten ist. Sie schlugen vor, zwei spiegelbildliche Experimente zur schwachen Wechselwirkung durchzuführen. Liefern diese Experimente unterschiedliche Resultate, so ist dies ein Anzeichen für Paritätsverletzung. Im selben Jahr konnte dies durch das **Wu-Experiment** bestätigt werden. Im darauffolgenden Jahr konnte durch das Goldhaber-Experiment dann die Helizität des Neutrinos bestimmt werden.

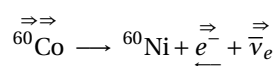
9.2 Wu-Experiment

Das Wu-Experiment wurde 1956 von der chinesisch-amerikanischen Physikerin *Chien-Shiung Wu* durchgeführt um die Paritätserhaltung der schwachen Wechselwirkung experimentell zu überprüfen. Der Versuch wurde mit dem β^- -Zerfall von ^{60}Co durchgeführt. Die ^{60}Co -Atomkerne werden bei einer Temperatur von etwa 10 mK magnetisch so ausgerichtet, dass ihre Spins in eine Vorzugsrichtung zeigen (nämlich parallel zum Magnetfeld, also in positive z-Richtung). Der Prozess mit den Spinausrichtungen, die sich aus der Drehimpulserhaltung ergeben, ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

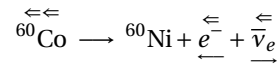


Es wird nun die Anzahl der in negativer z-Richtung emittierten Elektronen gemessen. Aus Drehimpulserhaltungsgründen müssen die Spins von Elektron und Neutrino in Richtung des ursprünglichen ^{60}Co -Spins zeigen. Damit legt das äußere Magnetfeld auch die Spin-Richtung der emittierten Elektronen und Neutrinos fest – allerdings nur zu einem gewissen Grad, der dem Polarisationsgrad der Cobalt-Kerne entspricht. Man muss hier die beiden folgenden Szenarien unterscheiden:

Szenario Die Kernspins sind in positiver z-Richtung ausgerichtet. Die in negativer z-Richtung detektierten Elektronen wurden also entgegen der Richtung des ^{60}Co -Spins und damit auch ihres Spins emittiert (das heißt mit **negativer Helizität**). Dies lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



Gespiegeltes Szenario Da die Kernspins Axialvektoren sind, zeigen sie nach einer Spiegelung immer noch in die gleiche Richtung: $\vec{r} \times \vec{p} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}$. Anstatt den Versuchsaufbau zu spiegeln reicht es daher aus, die Kernspins mit Hilfe des Magnetfeldes zu drehen. Es werden dann Elektronen detektiert, die in Richtung des ^{60}Co -Spins emittiert wurden, also mit **positiver Helizität**:



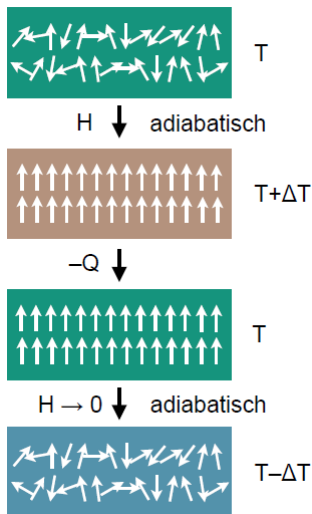
Wäre die Parität erhalten, wären beide Szenarien gleich wahrscheinlich: Es würden genauso viele Elektronen in Richtung des Kernspins wie in Gegenrichtung emittiert. Wu stellte jedoch experimentell fest, dass fast alle Elektronen entgegen der Spinrichtung der Kerne emittiert werden. Wie stark die Paritätsverletzung denn nun wirklich ist, konnte so jedoch nicht bestimmt werden.

In der schwachen Wechselwirkung ist die Parität verletzt.

9.2.1 Experimentelle Herausforderung des Wu-Experiments

Das äußere Magnetfeld legt die Spin-Richtung der emittierten Elektronen und Neutrinos nur bis zu einem gewissen Grad fest, dem Polarisationsgrad der ^{60}Co -Kerne. Aufgrund des - im Vergleich zu Elektronen - sehr geringen magnetischen Moments der Kerne sind extrem niedrige Temperaturen und hohe Magnetfelder notwendig, die durch ausschließliche Kühlung mit flüssigem Helium und Einsatz einer Spule nicht zu erzielen waren. Dies gelang aber mit Hilfe der *Gorter-Rose-Methode*.

Die Physik dahinter ist der **magnetokalorische Effekt**. Darunter versteht man das Phänomen, dass sich ein Material erwärmt, wenn man es einem starken Magnetfeld aussetzt, und es sich abkühlt, wenn man das Magnetfeld entfernt. Die einzelnen Schritte lauten nun:



1. Die ^{60}Co -Kerne werden in ein paramagnetisches Salz (CeMg-Nitrat) eingelagert, das einen stark anisotropen g -Faktor hat und in einem Kryostat durch flüssiges Helium und Abpumpen von gasförmigem Helium bei einer Temperatur von $T \approx 1,2\text{K}$ gehalten wird (Bild 1).
2. Nun wird das Salz durch ein Magnetfeld entlang der Achse mit dem größten g -Faktor magnetisiert. Dadurch kommt es aufgrund des magnetokalorischen Effekts zu einer Temperaturerhöhung $T + \Delta T_1$ (Bild 2), die durch Kühlung kompensiert werden kann (Bild 3).
3. Nun wird die Anordnung adiabatisch entmagnetisiert, wodurch es zu einer Temperaturabsenkung $T - \Delta T_2$ kommt. Die Größenordnung der Temperatur liegt nun im Bereich von $T \approx 3\text{mK}$ (Bild 4).
4. Anschließend wird das Salz entlang der Richtung des niedrigen g -Faktors (z -Richtung) magnetisiert, wodurch nur ein vernachlässigbarer Temperaturanstieg hervorgerufen wird.

Aufgrund der Polarisierung der Elektronenhülle der Cobalt-Ionen und des damit verbundenen Magnetfeldes liegt ein deutlich höheres Magnetfeld in Kernnähe vor, so dass ein Polarisationsgrad der ^{60}Co -Kerne von ca. 60% erreicht wurde.

9.3 Goldhaber-Experiment

Das Wu-Experiment deutet darauf hin, dass es nur linkshändige Neutrinos gibt, konnte dies jedoch quantitativ nicht exakt genug beweisen, da dies eine Helizität von -1 voraussetzen würde:

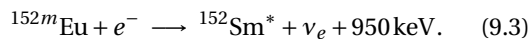
$$\mathcal{H}_{\text{exp}}(\nu) \approx -0,7 \pm \text{gro\ss e Fehler}$$

$$\mathcal{H}_{\text{theo}}(\nu) = -1$$

Die Frage, wie stark denn nun die Paritätsverletzung wirklich ist, wurde 1957 vom US-amerikanischen Physiker *Maurice Goldhaber* beantwortet, der mit seinem Experiment die Flugrichtung des Neutrinos und damit dessen Helizität bestimmt.

Im Experiment wird ein ^{152m}Eu -Kern in einem isomeren (metastabilen) Zustand verwendet:

1. Kern zerfällt durch K-Einfang. Dabei wird ein Neutrino emittiert.



2. Das angeregte Zustand regt sich durch γ -Strahlung ab.

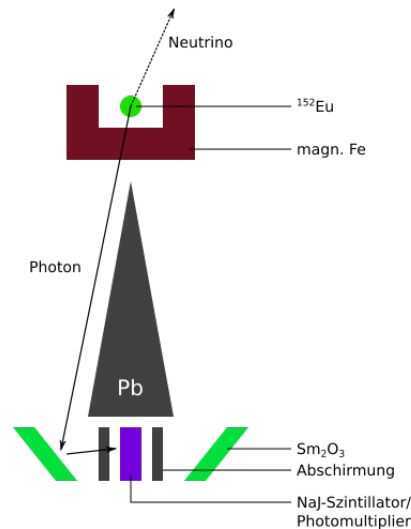
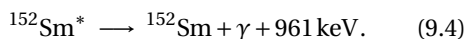
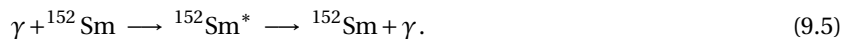


Abbildung 5: Schematischer Aufbau des Goldhaber-Experiments.

Dabei verwendet man gerade diese Elemente, da sie im Zusammenspiel der Eigenschaften die Messung möglich machen, wie im Folgenden erklärt werden soll.

9.3.1 Bestimmung der Flugrichtung des Neutrinos

Der Nachweis der Gamma-Quanten aus dem Sm-Zerfall beruht auf der resonanten Streuung der Gamma-Quanten an einem Sm_2O_3 -Target, welches ringförmig um den Detektor angebracht ist. Die Bleiabschirmung hindert Zerfallsphotonen aus der ^{152}Eu -Quelle daran, den Detektor direkt zu erreichen. Die resonante Streuung findet über **Kernresonanzabsorption** des Photons durch einen Sm-Kern und anschließende spontane Emission statt:



Eine resonante Absorption am Samarium wäre im Normalfall nicht möglich, da das vom $^{152}\text{Sm}^*$ nach dem Zerfall des ^{152}Eu in der Quelle emittierte Photon aufgrund des Kernrückstoßes nicht die gesamte Energie von 961 keV besitzt: Die Rückstoßenergie, die sich beim zweiten Zerfall auf den ^{152}Sm -Kern aufteilt, beträgt etwa 3,2 eV, während die natürliche Linienbreite nur etwa 10^{-2} eV beträgt. Demnach kann keine resonante Absorption stattfinden, da die Energie des Photons deutlich kleiner als die benötigte Anregungsenergie ist.

Allerdings befindet sich in diesem Fall das $^{152}\text{Sm}^*$ -Atom nicht in Ruhe, sondern bewegt sich wegen der Emission des Neutrinos kurz zuvor. Durch die sehr kurze Lebensdauer erfolgt hier keine Relaxation (Übergang in den Grundzustand) durch Wechselwirkungen mit dem Gitter des umgebenden Festkörpers. Bei einer im Vergleich zum Photon um 180° entgegengesetzten Emission des Neutrinos, beträgt die Abweichung der Energie des Gamma-Quants zur Resonanzenergie so nur etwa 10^{-4} eV, ist also deutlich kleiner als die natürliche Linienbreite von 10^{-2} eV.

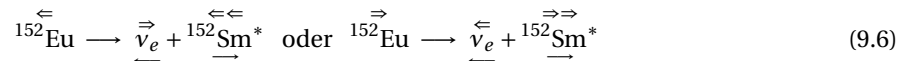
Dies ist der Grund, weshalb man gerade diese Elemente verwendet, da die Energien bei beiden Zerfällen recht ähnlich sind. Da das Neutrino und das Photon beide keine Massen haben und die Energien ähnlich sind, muss wenn beim zweiten Zerfall 3,2 eV auf den ^{152}Sm -Kern übergeht, beim ersten Zerfall ebenfalls etwa 3,2 eV Rückstoß auf den $^{152}\text{Sm}^*$ -Kern übergehen. Damit kommt es zu einem Dopplershift (Rot- und Blaushift) und die beiden Energien „kürzen“ sich gerade weg, wenn die Kerne in entgegengesetzte Richtungen fliegen. Durch den geringen Energieunterschied ist darüber hinaus gewährleistet, dass das Neutrino ziemlich genau nach oben wegfliegt, da eine kleine Ablenkung direkt die Kernresonanzabsorption unterdrücken würde.

Falls das Neutrino „nach oben“ emittiert wird ist resonante Absorption möglich und die Photonen erreichen den Detektor.

9.3.2 Bestimmung der Helizität des Neutrinos

Die Neutrino-Helizität lässt sich aus der Spin-Struktur des Zerfalls ableiten. Dabei ist die Drehimpulserhaltung zu beachten.

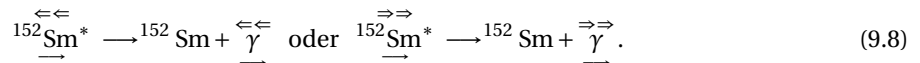
Zerfall des ^{152m}Eu Der Ausgangskern ^{152m}Eu befindet sich im Zustand 0^- . Der Ausgangszustand ^{152}Eu dagegen hat bereits das Elektron eingefangen und damit einen Spin von $\frac{1}{2}$. Zur vereinfachten Darstellung wird anstatt $^{152m}\text{Eu} + e^-$ direkt ^{152}Eu geschrieben. Da der Übergang ein reiner Gamow-Teller-Zerfall ist (Spinflip von antiparalleler Ausrichtung zu paralleler Ausrichtung, also von $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$), hat der Tochterkern den Zustand 1^- . Da das Neutrino einen Spin von $\frac{1}{2}$ hat, muss der Spin des Tochterkerns dem des Neutrinos entgegengerichtet sein. Es können somit folgende zwei Zerfälle stattfinden:



Daraus folgt für die Helizität:

$$\mathcal{H}(\nu) = \mathcal{H}(^{152}\text{Sm}^*) \quad (9.7)$$

Zerstrahlung des $^{152}\text{Sm}^*$ Das Photon trägt die Quantenzahlen 1^- . Der ^{152}Sm -Kern ist ein gg-Kern und damit im Zustand 0^+ . Bei einer Emission unter 180° bezüglich der Emissionsrichtung des Neutrinos gilt dann:



Bei resonanter Streuung entspricht also die Helizität des Photons der des $^{152}\text{Sm}^*$ -Kerns, und damit der des Neutrinos:

$$\mathcal{H}(\gamma) = \mathcal{H}(\nu) \quad (9.9)$$

Nun muss die Helizität des Photons bestimmt werden. Dabei gilt: **Helizität entspricht zirkularer Polarisation**. Nun hängt der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung stark von der Polarisierung des Targets ab. Aus diesem Grund baut man einen magnetisierten Eisenblock um die ^{152}Eu -Quelle. Der Energieverlust der gestreuten Photonen hängt nun von deren zirkularen Polarisation ab. Es kommt also zu keiner Kernresonanzabsorption im Sm_2O_3 für Photonen mit Energieverlust.

Tatsächlich misst man für den Anteil an Photonen mit zirkularer Polarisation bzw. negativer Helizität einen Wert von $(68 \pm 14)\%$. Die Erwartung aus der Winkelabhängigkeit der Photonenpolarisation liegt bei ca. 75%.

Die Messung ist verträglich mit Neutrinos mit 100% negativer Helizität. Daraus folgt, dass es **nur linkshändige Neutrinos** gibt und die **Parität maximal verletzt** ist. Die C-Parität ist damit ebenfalls verletzt.

10 Zerfall des neutralen Kaons - CP-Verletzung

Kaonen sind die leichtesten Mesonen mit einem s-Quark. Da die Strangeness nur bei der schwachen Wechselwirkung verletzt wird und sich beim Zerfall das s-Quark umwandeln muss, sind diese Mesonen relativ langlebig. Neutrale Kaonen können sowohl in zwei als auch in drei Pionen zerfallen. Das entstehende Zwei-Pion-System hat positive Parität, das Drei-Pion-System negative Parität.

$$\mathcal{P}_{\pi\pi} = +1$$

$$\mathcal{P}_{\pi\pi\pi} = -1.$$

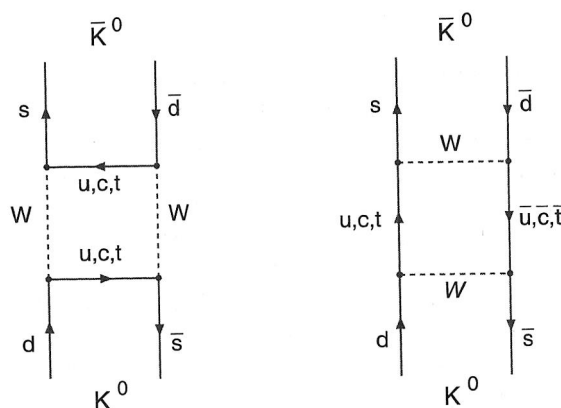
Die Tatsache, dass beide Zerfälle möglich sind, ist ein klassischer Fall von **Paritätsverletzung**.

10.1 Mischung von K^0 und \bar{K}^0

Da das K^0 und das \bar{K}^0 in die gleichen Endzustände zerfallen können, können sie sich über einen virtuellen pioni-schen Zwischenzustand ineinander umwandeln:

$$K^0 \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \\ 3\pi \end{array} \right\} \longleftrightarrow \bar{K}^0. \quad (10.1)$$

Im Quarkbild ist eine solche Umwandlung durch sogenannte Box-Diagramme möglich:



Während $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ als Zustände mit definierter Strangeness bezüglich der starken Wechselwirkung voneinander getrennt sind, können sie sich also über die schwache Wechselwirkung vermischen.

10.2 CP-Erhaltung

Bekannt ist, dass die schwache Wechselwirkung die Parität maximal verletzt. Dies wird besonders deutlich im Falle der Neutrinos, die nur als linkshändige Teilchen $|\nu_L\rangle$ und rechtshändige Antiteilchen $|\bar{\nu}_R\rangle$ vorkommen. Jedoch zeigte sich bei den Neutrinos auch, dass die kombinierte Anwendung von Raumspiegelung \mathcal{P} und Ladungskonjugation \mathcal{C} zu einem physikalisch möglichen Zustand führt:

$$\mathcal{CP}|\nu_L\rangle = |\bar{\nu}_R\rangle. \quad (10.2)$$

Die **V-A-Theorie** der schwachen Wechselwirkung lässt sich so formulieren, dass die kombinierte Quantenzahl CP erhalten bleibt.

Das ganze wird nun auf das Kaon übertragen. Die Zwei- und Drei-Pion-Systeme sind Eigenzustände des \mathcal{CP} -Operators mit den Eigenwerten ± 1 :

$$\mathcal{CP}|\pi^0\pi^0\rangle = +1 \cdot |\pi^0\pi^0\rangle \quad \mathcal{CP}|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -1 \cdot |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle \quad (10.3)$$

$$\mathcal{CP}|\pi^+\pi^-\rangle = +1 \cdot |\pi^+\pi^-\rangle \quad \mathcal{CP}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -1 \cdot |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle. \quad (10.4)$$

Darüber hinaus sind $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ **keine CP-Eigenzustände**:

$$\mathcal{CP}|K^0\rangle = -1 \cdot |\bar{K}^0\rangle \quad \mathcal{CP}|\bar{K}^0\rangle = -1 \cdot |K^0\rangle. \quad (10.5)$$

Wenn wir davon ausgehen, dass die schwache Wechselwirkung zwar die P- und C-Parität verletzt, aber invariant unter der Anwendung von \mathcal{CP} ist, dann **muss der Zustand des Kaons vor dem Zerfall ebenfalls ein Zustand mit definierter CP-Parität sein**. Durch Linearkombination kann man solche CP-Eigenzustände konstruieren:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle \right] \quad \text{mit } \mathcal{CP}|K_1^0\rangle = +1 \cdot |K_1^0\rangle \quad (10.6)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \right] \quad \text{mit } \mathcal{CP}|K_2^0\rangle = -1 \cdot |K_2^0\rangle. \quad (10.7)$$

Unter der Annahme der CP-Erhaltung muss man den hadronischen Zerfall eines neutralen Kaons als **Zerfall eines K_1^0 in zwei Pionen bzw. eines K_2^0 in drei Pionen** beschreiben. Die beiden Zerfallswahrscheinlichkeiten sollten sich stark voneinander unterscheiden. Der Phasenraum (Menge aller möglichen Zustände) für den 3-Pion-Zerfall ist erheblich kleiner als für den 2-Pion-Zerfall, weil die Ruhemasse von drei Pionen schon fast so groß wie die des neutralen Kaons ist. Demgemäß sollte der K_2^0 -Zustand deutlich langlebiger sein (600 mal länger) als der K_1^0 -Zustand.

Im Experiment erzeugt man Kaonen, indem man hochenergetische Protonen auf ein Target schießt. Beispiele wären:

$$p + n \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + p \quad (\Lambda^0 = |uds\rangle)$$

$$p + p \rightarrow K^+ + \bar{K}^0 + p + n.$$

Man beobachtet sowohl bei Reaktionen, in denen K^0 entstehen, als auch bei solchen mit \bar{K}^0 , eine Mischung von je zur Hälfte kurzlebigen und langlebigen Teilchen, die man als K_S^0 und K_L^0 bezeichnet.

- Der hadronische Zerfall eines neutralen Kaons muss **unter der Annahme der CP-Erhaltung** als Zerfall eines K_1^0 in zwei Pionen bzw. eines K_2^0 in drei Pionen beschrieben werden.

- Die experimentell entdeckten kurz- bzw. langlebigen Kaonen zerfallen in zwei bzw. drei Pionen.

→ Unter der Annahme der CP-Erhaltung kann man die verschiedenen Kaonen miteinander identifizieren:

$$K_1^0 = K_S^0 \quad \text{bzw.} \quad K_2^0 = K_L^0 \quad (10.8)$$

10.3 CP-Verletzung

Nach einer Flugzeit, die ein Vielfaches der Lebensdauer des K_S^0 ist, sind de facto alle kurzlebigen Kaonen zerfallen. In hinreichend großer Entfernung vom Produktionstarget beobachtet man daher einen reinen K_L^0 -Strahl. Präzisionsmessungen von *Cronin & Fitch*, bei denen 30 GeV-Protonen auf ein Beryllium-Target geschossen wurden, haben nun gezeigt, dass das langlebige Kaon mit einer geringen Wahrscheinlichkeit ($\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$) ebenfalls in nur zwei Pionen zerfällt. Diese Zustände wurden als Peak in der invarianten Masse bei etwas 490 MeV entdeckt. Entweder ist also der Masseneigenzustand K_L^0 nicht identisch mit dem CP-Eigenzustand K_2^0 , oder das Matrixelement für den Zerfall des K_2^0 hat einen Anteil, der den Übergang in zwei Pionen erlaubt. So oder so ist damit die **CP-Symmetrie verletzt**.

Die physikalischen Kaon-Zustände K_S^0 und K_L^0 sind also keine reinen CP-Zustände, sondern Mischzustände:

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \{ |K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \} \quad (10.9)$$

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \{ |K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle \} \quad (10.10)$$

Das ganze nennt man auch **indirekte CP-Verletzung in der Mischung**, da sie nur indirekt durch die Beobachtung des Zerfalls zu sehen ist. Man spricht von der indirekten CP-Verletzung, wenn man von der Oszillation von Kaonen, D-Mesonen und B-Mesonen redet. Diese können ineinander übergehen (oszillieren). CP-Verletzung in dieser Mischung tritt auf, wenn z.B. die Rate $\Gamma(K^0 \rightarrow \bar{K}^0)$ von $\Gamma(\bar{K}^0 \rightarrow K^0)$ verschieden ist. Später konnte man auch eine **direkte CP-Verletzung im Zerfall** eines Systems neutraler Kaonen feststellen (10^{-6} -Effekt).

Teil IV

Schalenmodell und Kernpotential

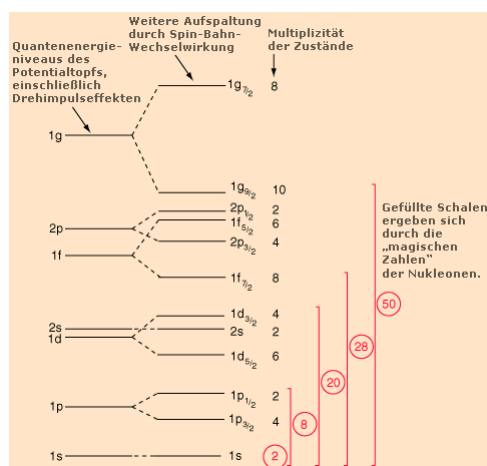
11 Das Schalenmodell des Kerns

Es scheint weniger plausibel zu sein, sich den dicht gepackten Kern mit Bahnen und Schalen vorzustellen, als die Elektronen im Schalenmodell des Atoms. Es ist leicht zu glauben, dass die Elektronen auf vielen Bahnen kreisen können, ohne gegen irgendetwas zu stoßen, aber **bei Protonen und Neutronen im Kern erwartet man ständige Kollisionen miteinander**. Jedoch passen die Messdaten nicht zu einem „dichten-Gas-Modell des Kerns“ und bemerkenswerte Muster wie die „Magischen Zahlen“ bei der Stabilität der Kerne unterstützen wiederum die scheinbar unwahrscheinliche Schalenstruktur. Hinweise auf eine Schalenstruktur waren:

- Erhöhtes Vorkommen der Elemente, bei denen Z oder N eine magische Zahl ist (diese Elemente haben eine höhere Bindungsenergie, als mit der Bethe-Weizsäcker-Formel ermittelt wird).
- Die stabilen Elemente am Ende einer natürlichen auftauchenden Zerfallsreihe haben alle eine magische Zahl der Protonen oder Neutronen.
- Die Wirkungsquerschnitte für Neutronenabsorption sind für Isotope mit N gleich einer magischen Zahl viel geringer, als bei benachbarten Isotopen.
- Die Bindungsenergie für das letzte Neutron ist bei magischer Neutronenzahl maximal; fügt man ein weiteres Neutron hinzu, so fällt die Bindungsenergie stark ab.

Wie können Nukleonen ganze Bahnen umlaufen, wenn auf sie die enorme starke Kraft wirkt und sie ständig mit vielen anderen Nukleonen zusammenstoßen könnten? Dies liegt am Paulischen Ausschlussprinzip, das besagt, dass zwei Fermionen nicht den gleichen Quantenzustand besetzen dürfen. Gibt es in der Nähe keine unbesetzten Quantenzustände für die verfügbare Energie, so wird keine Wechselwirkung stattfinden. Dies ist eine wesentliche Idee der Quantentheorie - gibt es kein Loch für ein Nukleon, in das es bei einer Kollision gestoßen werden kann, so findet diese Kollision nicht statt! Hierfür gibt es kein klassisches Analogon.

Die Hinweise auf eine Art von Schalenstruktur und die begrenzte Anzahl an erlaubten Energieniveaus deuten darauf hin, dass sich jedes Nukleon in einem effektiven Potentialtopf bewegt, der durch die Kräfte aller anderen Nukleonen entsteht. Dies führt zu der **Energiequantisierung** ähnlich wie beim Kastenpotential und beim Potential des harmonischen Oszillators. Berechnet man die Energien aus einem solchen Potential, so ergeben sich eine Reihe von Energieniveaus, wie weiter unten zu sehen ist. Die Bezeichnungen der Niveaus sind etwas anders, als bei den Atomenergieniveaus. Die Energieniveaus nehmen mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l zu und die Bezeichnungen s, p, d, f, \dots stehen für $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ genau wie bei den Atomen. Es gibt jedoch kein physikalisches Analogon zu der Hauptquantenzahl n und so wird das niedrigste Niveau jeder Bahnquantenzahl mit $n = 1$ bezeichnet. Daher können auch Bezeichnungen wie $1g$ entstehen, die bei der Notation für Atome nicht auftreten können, da die Bahnquantenzahl nicht, wie bei den Atomen, auf n beschränkt ist ($l < n$).



Zusätzlich zu der Abhängigkeit von der Beschaffenheit des Potentialtopfes und der Bahnquantenzahl, gibt es eine beachtliche Aufspaltung der Niveaus durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung. Diese Aufspaltung ist deutlich größer als bei den Atomen, da hier anstatt der elektromagnetischen Wechselwirkung die starke Wechselwirkung auftritt. Diese Aufspaltung vergrößert sich bei größeren Bahnquantenzahlen. Dies führt auch zu einer Überlappung der

Niveaus, wie im Diagramm zu sehen ist. Die Indizes geben den Wert des Gesamtdrehimpulses j an, die Multiplizität jedes Zustands beträgt $2j + 1$. Die Abstände der Niveaus sind bei Protonen und Neutronen meist gleich. Die Niveaus der Protonen liegen jedoch aufgrund der Coulombabstoßung etwas höher als die der Neutronen. Diese Verschiebung entspricht dem Coulombanteil im Tröpfchenmodell

12 Magische Zahlen

Man hat herausgefunden, dass Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl (gg-Kerne) stabiler sind, als die mit ungerader Anzahl. Insbesondere gibt es „magische Zahlen“ bei der Anzahl der Neutronen und Protonen. Kerne mit magischen Zahlen sind sehr stabil.

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Kerne, die eine Anzahl von Protonen und Neutronen gleich einer magischen Zahl haben, nennt man auch „doppelt magisch“ und sind besonders stabil.

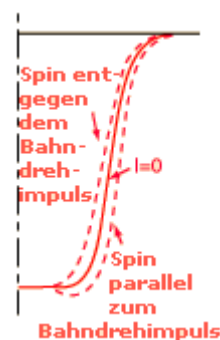
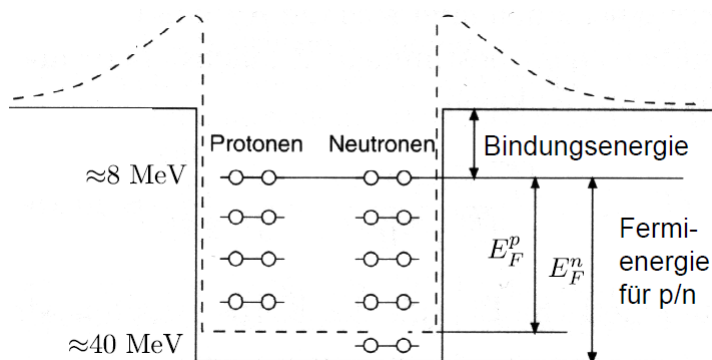
13 Kernpotential

Bei dem Schalenmodell des Kerns nimmt man an, dass ein sich ein Nukleon in einem effektiven, anziehenden Potential bewegt, das durch die umliegenden Nukleonen erzeugt wird.

Die Potentiale für Neutronen und Protonen nehmen ungefähr die folgende Form an. Dabei ist zu beachten, dass der Protonentopf nicht so tief ist wie der Neutronentopf, dafür aber einen Coulombwall besitzt. Dies liegt daran, dass die Coulombabstoßung hinzu addiert wird.

Eine zusätzliche Korrektur, die gemacht werden muss, ist die Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung. Ihre Auswirkung auf den Potentialtopf ist rechts unten skizziert. Ist der Spin dem Bahndrehimpuls entgegengesetzt, so wird der effektive Potentialtopf schmaler und die Energie größer, genau wie beim Kastenpotential. Dies zeigt sich in der Aufspaltung der Energieniveaus im Termschema des Schalenmodells.

Interessant zu bemerken ist, dass bei schwereren Kernen die Fermienergie dennoch konstant bleibt, weshalb die Energieniveaus näher zusammen rutschen beziehungsweise ihr Abstand kleiner wird.



Teil V

Modell der Quasifreien Elektronen

Elektronen in Metallen sind nicht wirklich frei, sondern bewegen sich in einem periodischen Gitterpotential.

14 Bloch-Funktion

Die Beschreibung des Verhaltens der Elektronen im periodischen Gitterpotential erfolgt in der *Einelektron-Näherung*. Das Potential besitzt dabei die Translationssymmetrie des Gitters:

$$V(r) = V(r + R). \quad (14.1)$$

Dabei ist R ein beliebiger Gittervektor. Das Potential lässt sich dann in eine Fourier-Reihe nach reziproken Gittervektoren G entwickeln:

$$V(r) = \sum_G V_G e^{iG \cdot r}. \quad (14.2)$$

Die Fourierkoeffizienten V_G sind dabei charakteristisch für den betrachteten Kristall.

Es liegt nahe, die Wellenfunktion $\psi(r)$ des betrachteten Elektrons nach ebenen Wellen zu entwickeln, da sich im Grenzfall freier Elektronen diese Darstellung bereits bewährt hat. Wir wählen daher den Ansatz

$$\psi(r) = \sum_k c_k e^{ik \cdot r}. \quad (14.3)$$

Setzt man nun die Reihenentwicklung für das Potential und die Wellenfunktion in die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (14.4)$$

ein, so erhält man eine Struktur der Form

$$\psi_k(r) = \left(\sum_G c_{k-G} e^{-iG \cdot r} \right) e^{ik \cdot r}. \quad (14.5)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist die Fourier-Entwicklung einer gitterperiodischen Funktion. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein periodisches Potential sind also ebene Wellen, multipliziert mit einem gitterperiodischen Modulationsfaktor, den wir $u_k(r)$ nennen. Damit lässt sich die Wellenfunktion von Elektronen in einem periodischen Potential durch die **Bloch-Funktion**

$$\psi_k(r) = u_k(r) e^{ik \cdot r} \quad (14.6)$$

ausdrücken, wobei sich die Gitterperiodizität in der Beziehung

$$u_k(r + R) = u_k(r) \quad (14.7)$$

manifestiert. Damit ist die Translation um einen Gittervektor R gleichwertig mit der Multiplikation mit dem Phasenfaktor $e^{ik \cdot R}$.

Im einfachen Fall freier Elektronen ist $u(r)$ eine Konstante.

Bloch-Funktionen haben zwei wichtige Eigenschaften:

Bloch-Funktionen, deren Wellenvektoren sich um einen reziproken Gittervektor unterscheiden, sind gleich! Dies folgt aus Gleichung 14.5: Wenn man zum Wellenvektor k den reziproken Gittervektor G' addiert, so erhält man

$$\psi_{k+G'}(r) = \left(\sum_G c_{k+G'-G} e^{i(G'-G) \cdot r} \right) e^{i(k+G') \cdot r}. \quad (14.8)$$

Beachtet man nun, dass die Superposition zweier Gittervektoren wieder einen Gittervektor bildet, so ergibt sich nach der Umbenennung $G - G' \rightarrow G''$ gerade

$$\psi_{k+G'}(r) = \underbrace{\left(\sum_G c_{k-G''} e^{-iG'' \cdot r} \right)}_{u_k(r)} e^{i(k+G') \cdot r}. \quad (14.9)$$

Daraus folgt dann

$$\psi_{k+G'}(r) = \psi_k(r). \quad (14.10)$$

Die Eigenwerte E_k wiederholen sich periodisch im reziproken Raum! Für Eigenwerte, deren Wellenvektoren sich um einen reziproken Gittervektor unterscheiden, lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi_k = E_k\psi_k \quad \text{bzw.} \quad H\psi_{k+G} = E_{k+G}\psi_{k+G}. \quad (14.11)$$

Mit Gleichung 14.10 folgt damit

$$H\psi_k = E_{k+G}\psi_k \quad \text{und} \quad E_k = E_{k+G}. \quad (14.12)$$

Damit folgt:

Die Wellenfunktionen der Elektronen und ihre Eigenwerte wiederholen sich im k -Raum periodisch. Es reicht, sich auf die Lösungen in der 1. Brillouin-Zone zu beschränken, da die Lösungen in diesem Teil des k -Raums bereits die ganze Information enthalten.

$$\begin{aligned} \psi_{k+G'}(r) &= \psi_k(r) \\ E_{k+G} &= E_k. \end{aligned}$$

15 Näherung für quasi-freie Elektronen

Nun lösen wir die Schrödinger-Gleichung unter der Annahme, dass die Amplitude des periodischen Potentials so klein ist, dass wir $V_G \approx 0$ setzen dürfen. Die Symmetrie des Gitters soll aber nach wie vor periodische Lösungen erzwingen! Man spricht dann von einem **leeren Gitter**. Unter dieser Annahme folgt aus der Periodizität ?? der Eigenwerte die einfache Lösung

$$E_k = E_{k+G} = \frac{\hbar^2}{2m} |k+G|^2. \quad (15.1)$$

Offensichtlich handelt es sich um Parabeln, die im k -Raum jeweils um G gegeneinander verschoben sind. Wir untersuchen zunächst das eindimensionale leere Gitter mit der Gitterkonstanten a und dem kleinsten reziproken Gittervektor $g = \frac{2\pi}{a}$ etwas näher. Die Lösung 15.1 besteht, wie in Abbildung 6 veranschaulicht, aus einer periodischen Anordnung von Parabeln. Wie erwähnt, erlaubt die Periodizität der Lösung eine Darstellung aller Energieeigenwerte im Wellenvektorbereich $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$. Bei der Reduktion auf die 1. Brillouin-Zone verschiebt man die Teile der Parabeln, die sich außerhalb der 1. Brillouin-Zone befinden, um einen reziproken Gittervektor derart, dass sie innerhalb der ersten Zone zu liegen kommen. So erhält man die folgende Darstellung:

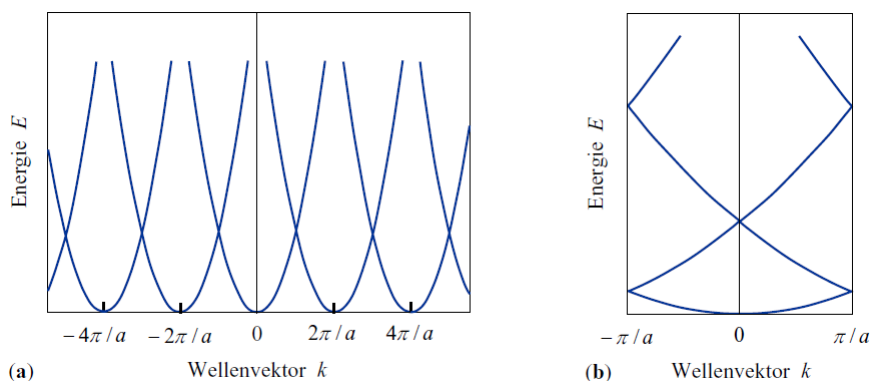


Abbildung 6: **a)** Darstellung der Lösung der Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen leeren Gitters. Die Energieeigenwerte wiederholen sich im k -Raum mit der Periode $g = \frac{2\pi}{a}$. **b)** Reduktion der Energieeigenwerte auf die 1. Brillouin-Zone. Alle erlaubten Energieeigenwerte kommen durch Addition eines geeigneten reziproken Gittervektors im Bereich $-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$ zu liegen. Man beachte, dass sich die Energieskala der beiden Abbildungen unterscheidet.

Im dreidimensionalen Raum ist der Sachverhalt etwas komplizierter. Für ein kubisch primitives Gitter lässt sich 15.1 in der Form

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} |k + G|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left[(k_x + G_x)^2 + (k_y + G_y)^2 + (k_z + G_z)^2 \right] \quad (15.2)$$

schreiben. Wie man sich anhand dieser Gleichung leicht überzeugen kann, ruft die Reduktion auf die 1. Brillouin-Zone eine zunehmende Entartung der Dispersionskurven hervor, d.h. gleiche Teile der E_k -Kurven gehören zu unterschiedlichen reziproken Gittervektoren. Darüber hinaus tritt bei dieser Art der Darstellung bei höheren Energien eine Vielzahl von Kurven auf.

In der Realität gibt es jedoch zu der Näherung $V_G \approx 0$ einige Unterschiede: Zum einen werden Entartungen aufgehoben. So spalten zum Beispiel die Energieeigenwerte der ersten und zweiten Brillouin-Zone, die beim leeren Gitter entartet waren, deutlich erkennbar auf. Zum anderen treten an den Grenzen der Brillouin-Zone **Energielücken** auf, die durch die endliche Stärke des Gitterpotentials bewirkt werden. Die Bereiche zwischen den Energielücken bezeichnet man als **Energiebänder**.

Wir wollen das Auftreten von Energielücken zunächst anhand eines sehr einfachen Beispiels plausibel machen: Bewegt sich ein Elektron mit dem Wellenvektor k entlang einer atomaren Kette, so wird es an jedem Atom gestreut. Erfüllt der Wellenvektor des Elektrons die Streubedingung $K = G$, so erfährt das Elektron eine **Bragg-Reflexion**, bei der sich die Teilwellen konstruktiv überlagern. Da die reflektierte Welle in die entgegengesetzte Richtung läuft, gilt für den Streuvektor $K = 2k$. Bragg-Reflexion tritt daher bei der Wellenzahl

$$k = \pm \frac{g}{2} = \pm \frac{\pi}{a} \quad (15.3)$$

auf, wobei $g = \frac{2\pi}{a}$ für den kleinsten reziproken Gittervektor steht. Einlaufende und reflektierte Welle überlagern sich, so dass sich eine stehende Welle ausbildet. Im stationären Zustand haben beide Teilwellen das gleiche Gewicht, woraus sich für die resultierende Wellenfunktion die beiden Möglichkeiten (symmetrisch und antisymmetrisch) ergeben:

$$\psi_s \propto \left(e^{i\frac{gx}{2}} + e^{-i\frac{gx}{2}} \right) \propto \cos\left(\frac{gx}{2}\right), \quad (15.4)$$

$$\psi_a \propto \left(e^{i\frac{gx}{2}} - e^{-i\frac{gx}{2}} \right) \propto \sin\left(\frac{gx}{2}\right). \quad (15.5)$$

Das Resultat ist eine räumlich modulierte Ladungsdichte, die durch

$$\rho_s = e |\psi_s|^2 \propto \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \text{und} \quad (15.6)$$

$$\rho_a = e |\psi_a|^2 \propto \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (15.7)$$

gegeben ist. Im Gegensatz zu diesen Ladungsdichten, die zur stehenden Welle gehören, ist die Ladungsdichte einer laufenden Welle konstant:

$$\rho = e |\psi|^2 = e^{-ikx} e^{ikx} = \text{const.} \quad (15.8)$$

In Abbildung 7 sind neben dem Verlauf eines willkürlich gewählten Pseudopotentials die Elektronendichten dargestellt. Bei der Lösung ψ_s ist die Dichte in Kernnähe gegenüber der Dichte der laufenden Welle erhöht, während sie bei ψ_a reduziert ist. Ist das Potential in Kernnähe abgesenkt, so führt dies, im Vergleich zur laufenden Welle im symmetrischen Fall zu einer Absenkung, im antisymmetrischen Fall zu einer Anhebung der Elektronenenergie. Da die Schrödinger-Gleichung an der Zonengrenze zwei Lösungen mit unterschiedlicher Energie besitzt, wird so das Auftreten einer Energielücke verständlich.

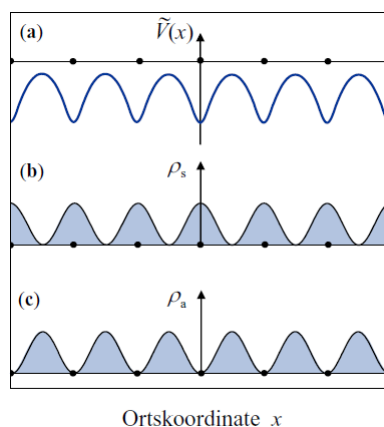


Abbildung 7: Ladungsdichteverteilung der Elektronen mit der Wellenzahl $\frac{\pi}{a}$. Die Lage der Atomrümpfe ist jeweils durch Punkte gekennzeichnet. **a)** Qualitativer Verlauf der potentiellen Energie. **b)** Ladungsdichte ρ_s der geraden und **c)** Ladungsdichte ρ_a der ungeraden Wellenfunktion.

Der Einfluss des Gitterpotentials ist in der folgenden Abbildung noch einmal deutlich dargestellt:

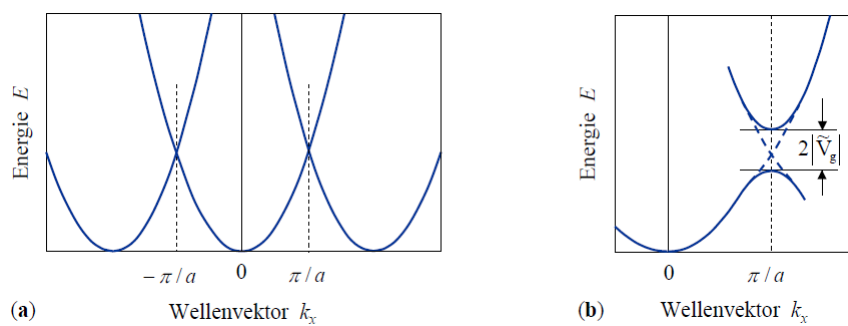


Abbildung 8: Dispersionskurven von quasi-freien Elektronen in einem eindimensionalen Kristall. **a)** Das periodische Potential ist so schwach, dass es vernachlässigt werden kann. **b)** Das periodische Potential bewirkt bei $k_x = \frac{\pi}{a}$ die Aufspaltung $|2V_g|$. Die Lösungen für das leere Gitter sind gestrichelt dargestellt.

Teil VI

Josephson-Kontakte und SQUIDS

16 Makroskopische Wellenfunktion

Cooper-Paare tragen keinen Gesamtspin und können in einem gemeinsamen Vielteilchenzustand kondensieren, der durch die makroskopische Wellenfunktion

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\varphi(r)} = \sqrt{n_s} e^{i\varphi(r)} \quad (16.1)$$

charakterisiert ist. Der Betrag der Wellenfunktion ist durch die Dichte der Cooper-Paare $\Psi\Psi^* = |\Psi_0|^2 = n_s$ gegeben. Die reelle Funktion $\varphi(r)$ beschreibt die Phase der Wellenfunktion und besitzt bei Supraleitern über makroskopische Entfernungen einen wohldefinierten Wert.

17 Josephson-Kontakte

Unterbricht man einen Supraleiter durch eine dünne, nichtleitende Schicht, so kommt es zu interessanten Phänomenen.

Wenn die Dicke der Isolatorschicht zwischen den beiden Supraleitern auf etwa 1 nm reduziert wird, reicht die Wellenfunktion des einen Supraleiters merklich in den Bereich des anderen. Dadurch werden die Wellenfunktionen der beiden Supraleiter gekoppelt und es kommt zu einem Tunneln von Cooper-Paaren durch die Isolatorschicht. Das prinzipielle Schaltbild zur Untersuchung des Josephson-Effekts ist sehr einfach und in Abbildung 9a skizziert. Der Überlapp der Wellenfunktionen ergibt einige überraschende Effekte. Sind die beiden Supraleiter voneinander getrennt, so werden die zeitlichen Änderungen ihrer Wellenfunktion durch die Schrödinger-Gleichungen $i\hbar\dot{\Psi}_1 = H_1\Psi_1$ und $i\hbar\dot{\Psi}_2 = H_2\Psi_2$ beschrieben. Sind E_1 und E_2 die Eigenwerte dieser beiden Gleichungen, so können wir im Sinne einer störungstheoretischen Behandlung der gekoppelten Supraleiter diese durch

$$i\hbar\dot{\Psi}_1 = E_1\Psi_1 + \kappa\Psi_2 \quad \text{und} \quad (17.1)$$

$$i\hbar\dot{\Psi}_2 = E_2\Psi_2 + \kappa\Psi_1 \quad (17.2)$$

ersetzen. Die Kopplung zwischen den beiden Supraleitern wird jeweils durch den zusätzlichen Term mit dem Kopplungsparameter κ berücksichtigt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die beiden Supraleiter aus dem gleichen Material bestehen und daher die gleiche Cooper-Paardichte $n_{s1} = n_{s2} = n_s$ aufweisen. In diesem Fall sind auch E_1 und E_2 gleich. Fällt jedoch die Spannung U an der Isolatorschicht ab, so verschieben sich die Eigenwerte und es gilt $E_2 - E_1 = -2eU$.

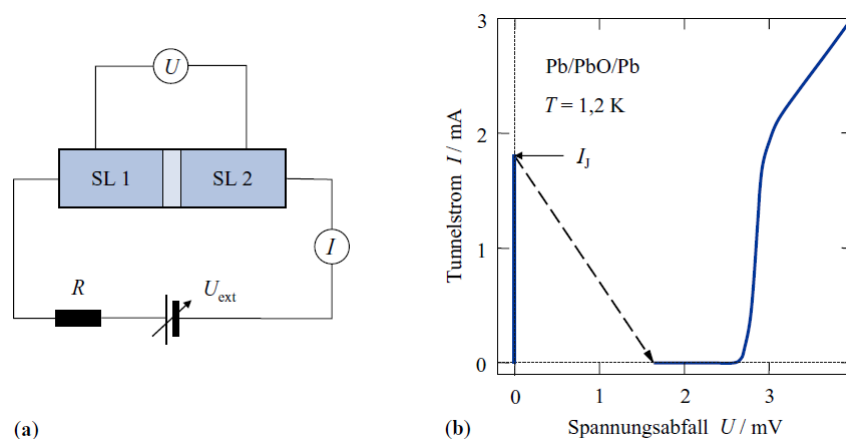


Abbildung 9: Josephson-Kontakt. **a)** Prinzipielles Schaltbild. **b)** Strom-Spannungs-Charakteristik eines Pb/PbO/Pb-Tunnelkontakts. Bei Vergrößerung des Tunnelstroms durch den Kontakt springt der Arbeitspunkt von J_J auf die Quasiteilchenkennlinie.

Wir setzen nun die Wellenfunktion 16.1 für den jeweiligen Supraleiter ein und lassen dabei eine zeitliche Entwicklung der Dichte der Cooper-Paare und der Phase der Wellenfunktion zu. Nach Trennung von Real- und Imaginärteil, ergeben sich die vier Gleichungen:

$$\dot{n}_{s1} = \frac{2\kappa}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \dot{n}_{s2} = -\frac{2\kappa}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (17.3)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\kappa}{\hbar} \sqrt{\frac{n_{s2}}{n_{s1}}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{E_1}{\hbar}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{\hbar} \sqrt{\frac{n_{s1}}{n_{s2}}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{E_2}{\hbar}. \quad (17.4)$$

Die Differenz der letzten beiden Gleichungen liefert für die zeitliche Entwicklung der Phase

$$\hbar(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = -(E_2 - E_1) = 2eU. \quad (17.5)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass zwischen den Tunnelkontakten keine Spannung abfällt. Nach Gleichung 17.5 ist in diesem Fall die Phasendifferenz $(\varphi_1 - \varphi_2)$ zwischen den beiden Wellenfunktionen zeitunabhängig. Dann folgt $\dot{n}_{s1} = -\dot{n}_{s2}$. Demnach sollte ein Strom zwischen den beiden Supraleitern fließen. Dies würde aber sofort zu einer elektrischen Aufladung der Supraleiter führen. Wir dürfen jedoch nicht vergessen, dass die beiden Supraleiter Teil eines Stromkreises sind, der dafür sorgt, dass n_{s1} und n_{s2} konstant bleiben. Daher ist Gleichung 17.3 dennoch gültig und wir können für den Strom durch den Kontakt

$$I_s = I_J \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (17.6)$$

schreiben. Dies bedeutet, dass durch den Tunnelkontakt zwar ein Gleichstrom I_s fließt, an der Isolatorschicht aber keine Spannung abfällt. Dieses erstaunliche Phänomen bezeichnet man als **Josephson-Gleichstrom-Effekt**. Der kritische Strom I_J hängt von der Dichte n_s der Cooper-Paare, der Kontaktfläche A (typischer Wert $0,1 \text{ mm}^2$) und vor allem von der Kopplungsstärke κ und damit der Dicke der Isolatorschicht ab. Die Strom-Spannungs-Charakteristik eines Pb/PbO/Pb-Josephsonkontakts ist in Abbildung 9b wiedergegeben. Solange $I_s < I_J$ ist, bestimmt der „Nachschub“ aus der Stromquelle (vgl. Abbildung 9a) die Stromstärke und damit auch die Phasendifferenz $(\varphi_2 - \varphi_1)$ zwischen den beiden makroskopischen Wellenfunktionen.

18 SQUID

Wir betrachten nun den Einfluss eines Magnetfelds auf das Tunneln der Cooper-Paare. Da die Ableitung der relevanten Gleichungen im Falle eines einzelnen Tunnelkontakts etwas mühevoll ist, diskutieren wir hier zwei parallel geschaltete, identische Josephson-Kontakte, wie sie in Abbildung 10 schematisch dargestellt sind. Das Magnetfeld soll senkrecht auf der Zeichenebene stehen, die Kontaktstellen sollen so dünn sein, dass ihre Ausdehnung bei den folgenden Überlegungen vernachlässigt werden kann.

Der Gesamtstrom I_s setzt sich aus den Teilströmen durch die beiden einzelnen Kontakte nach Gleichung 17.6 zusammen:

$$I = I_J (\sin \delta_a + \sin \delta_b) = 2I_J \cos\left(\frac{\delta_a - \delta_b}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_a + \delta_b}{2}\right). \quad (18.1)$$

Hierbei wurde mit $\delta_a = (\varphi_{a1} - \varphi_{a2})$ und $\delta_b = (\varphi_{b1} - \varphi_{b2})$ die Phasendifferenz an den Kontakten A und B bezeichnet.

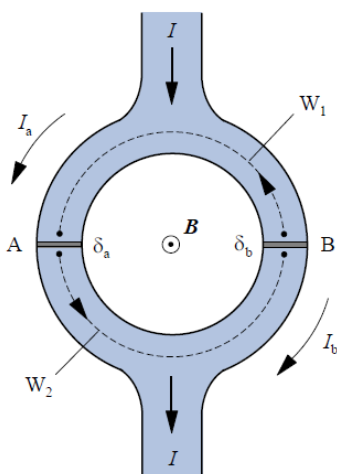


Abbildung 10: Stromfluss durch zwei parallel geschaltete, identische Josephson-Kontakte A und B. Senkrecht zur Zeichenebene soll das Magnetfeld \vec{B} anliegen. An den Kontaktflächen treten die Phasendifferenzen δ_a bzw. δ_b auf. Die Phasenunterschiede werden längs der gestrichelt eingezeichneten Wege W_1 und W_2 berechnet.

Wie wir gleich sehen werden, wird die Differenz $(\delta_a - \delta_b)$ vom Magnetfluss Φ durch den Ring bestimmt. Wählt man einen geschlossenen Integrationspfad über die Stromdichte in der Ringmitte, so verschwindet die Stromdichte und man erhält

$$\frac{\hbar}{e} \oint \nabla \varphi ds = 2 \oint \vec{A} ds. \quad (18.2)$$

Das linke Integral liefert

$$\frac{\hbar}{e} \oint \nabla \varphi ds = \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (18.3)$$

Das Linienintegral über das Vektorpotential lässt sich mit Hilfe des Stokesschen Satzes in ein Flächenintegral über die magnetische Induktion umformen, man erhält

$$2 \oint \vec{A} ds = 2 \int_{\Sigma} \vec{B} df = \Phi, \quad (18.4)$$

wobei Σ für die vom Integrationspfad umschlossene Fläche steht und Φ den eingeschlossenen Magnetfluss beschreibt.

Übertragen wir dieses Wissen nun auf den SQUID, so können wir den Integrationsweg wieder in den supraleitenden Bereich der Probe legen, in dem kein Stromfluss auftritt. Für die Phasendifferenz längs der Wege W_1 und W_2 folgt dann

$$\varphi_{a1} - \varphi_{b1} = \frac{2e}{\hbar} \int_{W_1} \vec{A} ds \quad \text{und} \quad (18.5)$$

$$\varphi_{b2} - \varphi_{a2} = \frac{2e}{\hbar} \int_{W_2} \vec{A} ds. \quad (18.6)$$

Addiert man diese beiden Gleichung, so ergibt sich

$$\delta_a - \delta_b = \frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A} ds = \frac{2e\Phi}{\hbar}. \quad (18.7)$$

Die Beiträge des Felds in den Kontakten haben wir, wie oben angesprochen, vernachlässigt. Setzen wir diese Gleichung nun in Gleichung 18.1 ein, so finden wir

$$I_s = 2I_J \sin\left(\frac{\delta_a + \delta_b}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (18.8)$$

Der Phasenwinkel $(\delta_a + \delta_b)$, auf den das Magnetfeld keinen Einfluss hat, passt sich den experimentellen Gegebenheiten an. Der Kosinus-Term beschreibt die Oszillation des Stroms mit dem Magnetfeld und hat dabei die Periode des magnetischen Flussquantums ($\Phi_0 \approx 10^{-15}$ Vs). Der Stromfluss reagiert nun auf extrem kleine Magnetfeldänderungen, weshalb man dies in sogenannten SUQIDs (**S**uperconductive **Q**uantum **I**nterference **D**evice) ausnutzt, um Magnetfeldänderungen von bis zu 10^{-14} T zu messen. Aus quantenmechanischen Gründen kann durch den Ring nur ein magnetischer Fluss fließen, der ein ganzzahliges Vielfaches des elementaren Flussquantums $\Phi_0 \approx 10^{-15}$ Vs ist (**Flussquantisierung**).