

Diplom-Vorprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1 \text{ und } x^2 - 2|y| > 1\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1 \text{ und } x^2 - 2|y| < 1\}$$

in der (x, y) -Ebene.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Menge aus a), die beschränkt ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n) \right)^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{n!}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

und $g_n := f_n \mid_{[9,22]}$, also

$$g_n : [9, 22] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

(i) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (g_n) auf gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es ist durch $f(x) = \frac{1}{x - x\sqrt{x-1}}$ eine reellwertige Funktion f gegeben.

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- Berechnen Sie alle Stammfunktionen von f . Substituieren Sie hierzu zunächst geeignet.
- Geben Sie die Stammfunktion F von f an, die $F(1) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)} & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$$

- In welchen Punkten $x \in (-1, 2)$ ist f stetig?
- Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in (-1, 2)$ mit $f(x) = \frac{1}{2008}$.
- In welchen Punkten $x \in (-1, 2)$ ist f differenzierbar?
- Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in (-1, 2)$ mit $f'(x) = \sin 1$.
- In welchen Punkten $x \in (-1, 2)$ ist f stetig differenzierbar?
- Zeigen Sie, dass f über $(-1, 2)$ integrierbar ist und dass gilt

$$\int_{-1}^2 f(x) dx > -\frac{1}{3}.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem **09.10.2008**, vor dem Sekretariat (Mathematikgebäude 20.30) aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html>

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den **21.10.2008**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude 20.30) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **27.10.2008** bis **31.10.2008** im Allianzgebäude 05.20.

Die **allgemeine** Klausureinsicht (siehe Aushang) findet am Mittwoch, **05.11.2008**, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude 20.30) statt.