

## HÖHERE MATHEMATIK I FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

### BACHELOR-MODULPRÜFUNG

#### AUFGABE 1 (6+8+6=20 PUNKTE)

a) Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

b) Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge mit  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_n}{\sum_{k=1}^n a_k} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

*Hinweis:* Unterscheiden Sie danach, ob  $(\sum_{k=1}^n a_k)$  beschränkt oder unbeschränkt ist.

c) Untersuchen Sie, für welche  $x \in \mathbb{R}$  die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

konvergiert.

#### AUFGABE 2 (8+8+4=20 PUNKTE)

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-x^2/4} \sin(8/x^3) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist und die Ableitung durch

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2/4} \left( 4x^3 \sin(8/x^3) - \frac{x^5}{2} \sin(8/x^3) - 24 \cos(8/x^3) \right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

gegeben ist. Begründen Sie ihre Rechnung dabei ausführlich.

b) Zeigen Sie, dass  $|f'(x)| < 24$  für alle  $x \in [-1, 1]$ . Finden Sie danach passende Folgen, um zu beweisen, dass  $\sup_{x \in [-1, 1]} f'(x) = 24$  und  $\inf_{x \in [-1, 1]} f'(x) = -24$ .

*Hinweis:* Nutzen Sie für die erste Ungleichung  $e^{y^2} \geq 1 + y^2$  und für einen Teil der Potenzen von  $x$  die Tatsache, dass  $|x| \leq 1$  ist.

c) Verwenden Sie Teil b), um  $f'$  auf Stetigkeit zu untersuchen.

**AUFGABE 3 (6+6+4+4=20 PUNKTE)**

a) Für  $n \in \mathbb{N}$  seien die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass  $(f_n)$  gleichmäßig,  $(f_n')$  jedoch nur punktweise konvergiert und geben Sie jeweils die Grenzfunktion an.

*Hinweis:* Beachten Sie für  $(f_n)$  die Ungleichung  $0 \leq (1 - \sqrt{n}|x|)^2$ .

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung  $x(x - \sin(x)) = \cos(x)$  genau zwei Lösungen in  $[-\pi, \pi]$  besitzt.

c) Berechnen Sie den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sqrt{x})}{e^{1/x^2}}$  und folgern sie daraus, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})e^{-1/x^2} = 1.$$

d) Beweisen Sie die Monotonie der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \int_0^x (1 + 4t)e^{t^2} dt + xe^{x^2}.$$

**AUFGABE 4 (6+6+8=20 PUNKTE)**

a) Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

$$y' = -\frac{1}{x} \frac{y^2 + 6y + 5}{2y + 6}, \quad y(1) = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

divergiert.

*Hinweis:* Nutzen Sie die Substitution  $y = \frac{1}{x}$ .

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $\alpha \in \mathbb{R}$  den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**VIEL ERFOLG!**

**Hinweise für nach der Klausur:**

- Die Ergebnisse der Modulprüfung werden am Freitag, den 24.04.2019, am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematikgebäude (Geb. 20.30) veröffentlicht.
- Die Einsichtnahme in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den 02.05.2019, von 16 bis 18 Uhr im Messtechnik-Hörsaal (Geb. 30.33) statt.
- Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche vom 13.05.2019 bis 17.05.2019 statt.