1. Übungsklausur

Aufgabe 1

a)

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 5 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 9 \\ 0 & -2 & -12 & -2 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -110 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Somit: $x_3 = 0$,

$x_2 = \frac{1}{9}(9 + x_3) = 1$,

$x_1 = \frac{1}{2}(5 - 3x_2 - 7x_3) = 1$.

b)

$n = 1$: $\sum_{k=0}^{0} (k^2 + 4k + 2) 2^k = 2 \cdot 2^0 = 2 = 1^2 \cdot 2^1$.

$n \to n+1$: IV: $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 4k + 2) 2^k = n^2 2^n$.

Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+4k+2) 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2+4k+2) 2^k + (n^2+4n+2) 2^n$$
$$\overset{IV}{=} n^2 2^n + (n^2+4n+2) 2^n$$
$$= (2n^2 + 4n + 2) 2^n$$
$$= (n+1)^2 2^{n+1}.$$

Also gilt $\sum_{k=0}^{n-1} (k^2+4k+2) 2^k = n^2 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

a)

Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1)^2 = 0 .$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$c_1 + (c_2 + c_3 t)\, e^{-t} \quad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

b)

Ansatz für spezielle Lösung:

$$y_p(t) = c\, e^{-2t}$$

Einsetzen in die Dgl. liefert

$$(-8c + 8c - 2c)\, e^{-2t} = e^{-2t} \quad \Leftrightarrow c = -\tfrac{1}{2} .$$

Somit ist $y_p(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t}$ eine spezielle Lösung.

c)

Die allgemeine Lösung $y_a(t)$ ist

$$y_a(t) = c_1 + (c_2 + c_3 t)\, e^{-t} - \tfrac{1}{2} e^{-2t} \quad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

d)

Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = (at + b)\, t^2 e^{-t} .$$

2 e)

Die Lösung ist $y(t) = 1$.

Es ist $y'(t) = y''(t) = y'''(t) = 0$.

y erfüllt daher $y''' + 2y'' + y' = 0$

und die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen.

Mühsamerer Lösungsweg:

$$y(t) = c_1 + (c_2 + c_3 t)e^{-t}$$

$$y'(t) = (c_3 - c_2 - c_3 t)e^{-t}$$

$$y''(t) = (c_2 - 2c_3 + c_3 t)e^{-t}$$

$$y'''(t) = (3c_3 - c_2 - c_3 t)e^{-t}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= y'(0) = c_3 - c_2 \\ 0 &= y''(0) = c_2 - 2c_3 \\ 0 &= y'''(0) = 3c_3 - c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_2 = c_3 = 0 \\ c_1 = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

Eine Parameterdarstellung von E ist

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , s,t \in \mathbb{R} .$$

b)

HNF von E: $x - 1 = 0$

An der obersten Gleichung der Parameterdarstellung sieht man, dass

$$x - 1 = 0$$

sein muss. Diese Gleichung beschreibt aber bereits eine Ebene eindeutig und ist HNF.

Mühsamerer Lösungsweg:

$$\vec{n} = \pm \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \pm \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{n_0} = \pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \geq 0 ,$$

somit HNF von E: $x - 1 = 0$.

An der HNF liest man ab, dass der Abstand des Ursprungs von dieser Ebene gleich 1 ist.

c)

$P = (1, 0, 0)$

P ist der Schnittpunkt von E und der x-Achse.

3 d)

Sei $d \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+3d \\ 4d \end{pmatrix}$.

Dann gilt:

$$\overrightarrow{PQ} \perp g_1 \iff \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+3d \\ 4d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff 25d + 3 = 0 \iff d = -\frac{3}{25}$$

Somit $Q = (1, \frac{16}{25}, -\frac{12}{25})$.

e)

Sei $A = (1,1,0)$, $B = (1,4,4)$, $C = (1,-3,3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Es ist $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$, somit ist der Innenwinkel bei $(1,1,0)$ gleich $90°$ (bzw. $\frac{\pi}{2}$), und der Flächeninhalt von Δ ist

$\frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \| \, \| \overrightarrow{AC} \| = \frac{25}{2}$.

Alternative:

Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \frac{25}{2}$.

Aufgabe 4

a)

$|z^8| = 16 = 2^4 \quad , \arg(z^8) = \pi$

$\Rightarrow z^8 = 2^4 e^{i(1+2k)\pi} \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z_k = \sqrt{2}\, e^{i(\frac{1}{8}+\frac{k}{4})\pi} \quad , k = 0, 1, \ldots, 7$

c)

$$\begin{aligned} z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 &= z_0 z_1 z_2 z_3 \overline{z_0}\, \overline{z_1}\, \overline{z_2}\, \overline{z_3} \\ &= |z_0|^2 |z_1|^2 |z_2|^2 |z_3|^2 \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Mühsamerer Lösungsweg:

$$\begin{aligned} z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 &= 2^4 \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^8 e^{i\pi\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{7} k\right)} \\ &= 16\, e^{i 8\pi} = 16 \end{aligned}$$

d)

Erwin verzehrt $\frac{1}{45}$ Tüte pro Minute,
Ulrike " $\frac{1}{30}$ " " ",
Petra " $\frac{1}{60}$ " " ".

Also verzehren die Drei gemeinsam

$\frac{1}{45} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{13}{180}$ Tüte pro Minute.

Bis die Tüte leer ist, dauert somit

$\frac{180}{13}$ Minuten.

4 b)