

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**  
**2. Übungsblatt**

**Aufgabe 6**

a) Für  $k \in \{1, 2, 3\}$  seien die Funktionen  $f_k: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  definiert durch

$$f_1(x) := x, \quad f_2(x) := 1 + \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) := 1 - \frac{1}{x}.$$

Überprüfen Sie jede dieser Funktionen auf Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie  $f_j \circ f_k$  für alle  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ .

**Aufgabe 7**

Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit

a)  $|x - 4| = |x + 1|;$

b)  $|2x| > |5 - 2x|;$

c)  $|2 - |2 - x|| \leq 1;$

d)  $|x + 1| + |x - 1| > 2.$

**Aufgabe 8**

Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

a)  $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|};$

*Tipp:* Verwenden Sie  $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$  für  $a \neq -1$ .

b)  $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$  und  $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$

**Aufgabe 9**

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a)  $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$

b)  $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

c)  $\left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\right\}$

### Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

a)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$

b)  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2;$

c)  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$

### Aufgabe 11

a) Zeigen Sie, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

b) Folgern Sie hieraus die geometrische Summenformel: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$