UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2005
26.09.2005

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie für $|x| < 1$ die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'(x) + xy(x) + 1 = 0 \ .$$

b) Berechnen Sie die Lösung der DGl aus a), deren Graph durch $(0, 1)$ verläuft.

c) Zur Lösung der Differentialgleichung für $y = y(x)$

$$(+) \qquad (1 - x^2)e^y y' + xe^y + 1 = 0 \ , \ |x| < 1 \ ,$$

soll anstelle von $y = y(x)$ mittels $y(x) = f(v(x))$ die Funktion $v = v(x)$ eingeführt werden. f ist so zu berechnen, dass die für v entstehende DGl linear ist.

d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Gleichung (+).

(**Hinweis:** Eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$, $|x| < 1$, ist $F(x) = \dfrac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}$)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie rang (A).

b) Geben Sie Basen von Kern (A) und Bild (A) an.

c) Geben Sie die Bedingungen zwischen a_1, a_2, a_3, a_4 an, unter denen das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

lösbar ist.

d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = y^3 + x^2 y - 3y$$

gegeben.

Bestimmen Sie

a) alle lokalen Maxima und alle lokalen Minima von f,

b) alle absoluten Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 3y^2 = 9$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Gegeben sind eine stückweise glatte, geschlossene Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{w}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 4x + y + az \\ bx \\ 2x + (5 - b)z \end{pmatrix} , \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

Für welche Werte von a und b ist $\vec{w}$ ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie für den Fall, dass $\vec{w}$ Gradientenfeld ist, den Wert des Linienintegrals $\oint_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s}$.

b) Es sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 , \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ gegeben. Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\vec{v}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Fluss $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} \, ds$ von $\vec{v}$ durch den Rand von G 1. direkt und 2. mittels des Divergenzsatzes.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Montag, dem 17.10.05, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 25. Oktober 05, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 31.10.05 bis 04.11.05.