

**Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A .
- b) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + xy^2 - y^2.$$

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

- b) Die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x, y) = xy - 2(x^2 + y^2).$$

Betrachten Sie g auf der Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}.$$

Begründen Sie, dass g auf S ihr Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+z^2} \sin(y) + e^x \arctan(z) \\ 2 + e^{x^2+z^2} \cos(y) \\ 2ze^{x^2+z^2} \sin(y) + \frac{e^x}{1+z^2} \end{pmatrix},$$

und die Kurve

$$\gamma: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

b) Die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 2\}$$

werde mit \mathcal{F} bezeichnet. Ferner sei das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

gegeben. Bestimmen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma,$$

wobei \vec{N} der Normaleneinheitsvektor an \mathcal{F} sei, der ins Äußere von Z weise.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 5e^{2t}, \quad t \geq 0,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 3$$

genügt.

b) Die Kurve γ bezeichne den positiv orientierten Rand der Menge

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 5/2, -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\}.$$

Skizzieren Sie B und berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

i) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + z} \, dz;$

ii) $\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)} \, dz.$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den **13.10.2009**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html>

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **21.10.2009**, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im HS 93 (Gebäude 10.81) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 26.10.2009 bis 30.10.2009 im Allianz-Gebäude 05.20.