Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
04.07.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+1+4+2=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}:$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Begründen Sie, warum A diagonalisierbar ist, ohne tatsächlich die Matrix anzugeben, die die Definition erfüllt.

c) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

Lösungsvorschlag

a) Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$p_A(\ ) = \begin{vmatrix} 2- & -3 & 1 \\ 3 & 1- & 3 \\ -5 & 2 & -4- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & - & - \\ 3 & 1- & 3 \\ -5 & 2 & -4- \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1- & 3 \\ -5 & 2 & -4- \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2- & 0 \\ -5 & 7 & 1- \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} - \begin{vmatrix} -2- & 0 \\ 7 & 1- \end{vmatrix} = (\ +2)(1-\ )$$

Die Eigenwerte von A sind nun die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also -2, 0 und 1. Die algebraischen Vielfachheiten sind jeweils 1, da es sich um einfache Nullstellen handelt.

b) Laut Vorlesung ist eine Matrix genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen. Da die Geometrische nach unten durch 1 und nach oben durch die Algebraische, welche ebenfalls jeweils 1 ist, beschränkt ist, liegt diese Eigenschaft hier vor, womit A diagonalisierbar ist.

c) Zum Eigenwert -2: Es gilt

$$A+2I=\begin{pmatrix}4&-3&1\\3&3&3\\-5&2&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\frac{1}{3}\\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\4&-3&1\\-5&2&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-4)\quad\cdot 5\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-7&-3\\0&7&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot(-\frac{1}{7})\\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&\frac{3}{7}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{7}\\0&1&\frac{3}{7}\\0&0&0\end{pmatrix};$$

womit mit dem (-1)-Trick oder alternativ über Lösen des resultierenden Gleichungssystems folgt, dass

$$E_A(-2)=\operatorname{lin}\{\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}\\-1\end{pmatrix}\}=\operatorname{lin}\{\begin{pmatrix}4\\3\\-7\end{pmatrix}\}.$$

Zum Eigenwert 0: Es gilt

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&1&3\\-5&2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\mid\cdot\frac{1}{2}\quad\cdot(-3)\quad\cdot 5\\ \\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{11}{2}&\frac{3}{2}\\0&-\frac{11}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\frac{2}{11}\\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{3}{11}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot\frac{3}{2}\\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{10}{11}\\0&1&\frac{3}{11}\\0&0&0\end{pmatrix};$$

womit folgt, dass

$$E_A(0)=\operatorname{lin}\{\begin{pmatrix}10\\3\\-11\end{pmatrix}\}.$$

Zum Eigenwert 1: Es gilt

$$A-I=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&0&3\\-5&2&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)\quad\cdot 5\\ \\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&9&0\\0&-13&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\frac{1}{9}\quad\cdot 13\quad\cdot 3\\ \\ \end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

womit folgt, dass

$$E_A(1)=\operatorname{lin}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

d) Laut Vorlesung ist die gesuchte invertierbare Matrix S zum Beispiel gegeben, wenn wir die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten in die Spalten der Matrix schreiben. Somit ist eine mögliche Lösung

$$S=\begin{pmatrix}4&10&1\\3&3&0\\-7&11&-1\end{pmatrix}$$

und die zugehörige Diagonalmatrix D hat die entsprechenden Eigenwerte in derselben Reihenfolge auf der Diagonalen, also $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (2+4+1+3=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & ; (x;y) \neq (0;0); \\ 0 & ; (x;y) = (0;0): \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

b) Bestimmen Sie, in welchen Punkten f partiell differenzierbar ist und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

c) Sind alle partiellen Ableitungen auf ihrem Definitionsbereich stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Für welche $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ und welche $v = (v_x;v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x;y)$ und wo gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(x;y) = (\operatorname{grad} f(x;y) \mid v)$?

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f

d) In $(x,y) \neq (0,0)$ ist f stetig partiell differenzierbar und somit differenzierbar. Laut Vorlesung existiert dort auch jede Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ und die Gleichung aus der Aufgabenstellung gilt. In $(0,0)$ gilt für $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dass

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_x^3 v_y}{t^6 v_x^6 - t^2 v_y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t v_x^3 v_y}{t^4 v_x^6 - v_y^2} = \begin{cases} 0 & , v_y = 0, \\ \frac{0}{-v_y^2} = 0 & , v_y \neq 0. \end{cases}$$

Somit existiert auch jede Richtungsableitung in $(0,0)$, hat den Wert 0 und stimmt wegen

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$$

ebenfalls mit $(\operatorname{grad} f(0,0) \mid v)$ überein.

Aufgabe 3 (4+(2+4)=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(1,1)$ gibt sowie eine Funktion $g : U \to V$, sodass die Gleichungen

$$xu + yvu^2 = 2 \qquad \text{und} \qquad xu^3 + y^2 v^4 = 2$$

für $(x,y,u,v) \in U \times V$ genau dann erfüllt sind, wenn $g(x,y) = (u,v)$ gilt. Berechnen Sie außerdem $g'(1,1)$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + \sin(y) > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \log(2x + \sin(y)) \qquad \forall (x,y) \in D.$$

(i) Zeigen Sie, dass D offen ist.

(ii) Geben Sie das zweite Taylorpolynom von f im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ an.

Lösungsvorschlag

a) Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} xu + yvu^2 - 2 \\ xu^3 + y^2 v^4 - 2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Es gilt nun $f(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie

$$\frac{\partial f}{\partial (u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2 x & 4y^2 v^3 \end{pmatrix},$$

womit $\frac{\partial f}{\partial (u,v)}(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ wegen

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

invertierbar ist. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz über implizit definierte Funktionen. Für die Ableitung $g'(1,1)$ berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \end{array} \begin{array}{l} |\cdot\frac{1}{3} \\ |\cdot\frac{1}{3} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

also $\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(1,1,1,1)\right)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Es folgt demnach

$$g'(1,1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(1,1,1,1)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,1,1,1) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) (i) Die Funktion g definiert durch $g(x,y) = 2x + \sin(y)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ und $(0,\infty)$ ist eine offene Menge. Somit ist $D = g^{-1}((0,\infty))$ nach der Vorlesung eine offene Menge als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion.

(ii) Wir berechnen alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{2x+\sin(y)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos(y)}{2x+\sin(y)}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) = -\frac{4}{(2x+\sin(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = \frac{(2x+\sin(y))(-\sin(y)) - \cos(y)\cdot\cos(y)}{(2x+\sin(y))^2} = -\frac{2x\sin(y)+1}{(2x+\sin(y))^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{2\cos(y)}{(2x+\sin(y))^2}$$

für alle $(x,y) \in D$. Das zweite Taylorpolynom von f in $(0,\frac{\pi}{2})$ ist gegeben durch $(h = (h_1,h_2))$

$$(T_2(f,(0,\frac{\pi}{2})))(h_1,\frac{\pi}{2}+h_2) := f(0,\frac{\pi}{2}) + h\cdot(\nabla f)(0,\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}h^T H_f(0,\frac{\pi}{2})h.$$

Wegen

$$f(0,\frac{\pi}{2}) = 0, \quad (\nabla f)(0,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(0,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

folgt demnach

$$(T_2(f,(0,\frac{\pi}{2})))(h_1,\frac{\pi}{2}+h_2) = 2h_1 - 2h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2$$

bzw. mit $h = (x, y-\frac{\pi}{2})$

$$(T_2(f,(0,\frac{\pi}{2})))(x,y) = 2x - 2x^2 - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{2})^2 = 2x + \frac{\pi}{2}y - 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 4 (4+(4+2)=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; |t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & ; |t| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Wo stellt die daraus resultierende Fourierreihe die Funktion f dar?

b) Gegeben sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = -x^3 + 12xy - y^3 + 42 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Finden Sie alle kritischen Punkte von g und klassifizieren Sie diese.

(ii) Begründen Sie, warum $\min\{g(x,y) \mid \|(x,y)\| \leqslant 6\}$ existiert und ausschließlich auf dem Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 6\}$ angenommen wird.

Lösungsvorschlag

a) Da f eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2k\pi} [\sin(kt)]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(k \cdot \frac{\pi}{2})}{k\pi}$$

gilt, also $a_{2k}(f) = 0$ und $a_{2k+1}(f) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ ist f stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ die Funktion f dar, da f dort stetig ist. Für $t_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ nimmt sie den Wert

$$\frac{(f(t_0)+) + (f(t_0)-)}{2} = \frac{1}{4},$$

an, womit die Fourierreihe an diesen beiden Punkten nicht die Funktion f darstellt, da $f(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

b) (i) An den kritischen Punkten von g gilt $\operatorname{grad} g(x;y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} g(x;y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 12y \\ 12x - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow -3(\frac{y^2}{4})^2 + 12y = 0 \wedge 12x = 3y^2 \\
&\Leftrightarrow y^4 = 64y \wedge x = \frac{y^2}{4} \\
&\Leftrightarrow (y = 0 \wedge x = 0) \vee (y^3 = 64 \wedge x = \frac{y^2}{4}) \\
&\Leftrightarrow (y = 0 \wedge x = 0) \vee (y = 4 \wedge x = 4).
\end{aligned}$$

Für die Klassifizierung berechnen wir die Hessematrix

$$H_g(x;y) = \begin{pmatrix} -6x & 12 \\ 12 & -6y \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$H_g(0;0) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\det H_g(0;0) = -144 < 0$, ist $H_g(0;0)$ nach Vorlesung indefinit und $(0;0)$ somit kein lokales Extremum. Zudem gilt

$$H_g(4;4) = \begin{pmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -24 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det H_g(4;4) = 24^2 - 12^2 > 0$ und $\operatorname{spur} H_g(4;4) = -48 < 0$ ist $H_g(4;4)$ negativ definit und $(4;4)$ somit ein lokales Maximum.

(ii) Die Menge $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x;y)\| \leqslant 6\}$ ist abgeschlossen als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0;6]$ unter der stetigen Funktion $(x;y) \mapsto \|(x;y)\|$. Da Sie offensichtlich auch beschränkt ist, ist sie laut Vorlesung kompakt. Die stetige Funktion g nimmt auf dieser Menge demnach ihr Maximum und Minimum an.
Ein globales Minimum ist gleichzeitig ein lokales Minimum, welches laut (i) abseits des Randes nicht existiert, wonach das Minimum auf dem Rand liegen muss.