

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Sommersemester 2009

Peer Christian Kunstmann
Institut für Analysis, Universität Karlsruhe
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany
e-mail: peer.kunstmann@math.uni-karlsruhe.de

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Wiederholung

Skalarprodukt und Norm in \mathbb{C}^n (vgl. 14.19)

Das *Skalarprodukt* in \mathbb{C}^n [bzw. in \mathbb{R}^n] ist definiert durch

$$(x|y) := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j \quad \text{für } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \text{ [bzw. } \in \mathbb{R}^n]$$

und die *Norm* ist definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad \text{für } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \text{ [bzw. } \in \mathbb{R}^n].$$

Wir schreiben im folgenden \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Transponierte und adjungierte Matrizen (vgl. 14.22)

Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ (mit n Zeilen und m Spalten) heißt die Matrix $\in \mathbb{K}^{m \times n}$, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die *transponierte Matrix zu A* und wird mit A^T bezeichnet.

Für alle $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ steht an der Stelle (k, j) in der Matrix A^T also der Eintrag a_{jk} , der in der Matrix A an der Stelle (j, k) steht.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{C}^{m \times n}$, für die an jeder Stelle (k, j) der Eintrag $\overline{a_{jk}}$ steht, die *adjungierte Matrix zu A* und wird mit A^* bezeichnet.

Setzt man $\bar{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (*konjugiert komplexe Matrix zu A*), so gilt $A^* = \bar{A}^T = (\bar{A})^T$.

Beachte: Für $x \in \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n \times 1}$ (*Spaltenvektor*) ist $x^T \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ ein *Zeilenvektor*.

Schreibweisen des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} \text{Für } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } (x|y) &= y^T x = x^T y. \\ \text{Für } x, y \in \mathbb{C}^n \text{ gilt } (x|y) &= y^* x = \overline{x^* y} = x^T \bar{y}. \end{aligned}$$

Warnung: Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ ist $xy^T = (x_j y_k)_{jk} \in \mathbb{K}^{n \times n}$!

Rechenregeln: Für Matrizen A, B , deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Dann gilt:

- (a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(Ax|y) = (x|A^T y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $(Ax|y) = (x|A^* y)$ für alle $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^n$.

Beweis: Man schreibe das Skalarprodukt wie oben und benutze die Rechenregeln.

15 Determinanten und Kreuzprodukt

Idee der Determinante: Zu gegebenen Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ gibt $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ das Volumen des von den Vektoren a_1, \dots, a_n aufgespannten *Spates*

$$\{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n : \lambda_j \in [0, 1] \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$

an. Hierbei stellen wir uns die Vektoren a_1, \dots, a_n als *Spalten* einer *Matrix* vor.

Beispiel: Der von den Einheitsvektoren e_1, e_2, \dots, e_n im \mathbb{R}^n aufgespannte Spat ist der *Einheitswürfel*

$$Q := [0, 1]^n.$$

15.1 Definierende Eigenschaften der Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_n \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

$$(D1) \det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1,$$

$$(D2) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } a_1, \dots, a_n, b_j \in \mathbb{K}^n \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} & \det(a_1, \dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots, a_n) \\ &= \alpha \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) + \beta \det(a_1, \dots, b_j, \dots, a_n), \end{aligned}$$

$$(D3) \det(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ falls es } j \neq k \text{ gibt mit } a_j = a_k.$$

Bemerkung: Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante \det eindeutig bestimmt.

(D1) bedeutet eine (naheliegende) Normierung. (D2) bedeutet, dass die Determinante in jeder Spalte linear ist. Zusammen mit (D3) bedeutet (D2), dass \det eine *alternierende Multilinearform* ist.

Schreibweise: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spalten $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Wir betrachten im folgenden \det meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

15.2 Folgerungen: (a) Ist eine Spalte = 0, so ist auch die Determinante = 0.

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Vertauscht man zwei Spalten miteinander, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

(d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ linear abhängig (dh gilt $\text{rg } A < n$), so ist $\det(A) = 0$.

(e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär.

Erinnerung: Eine Matrix $\in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt regulär, falls sie invertierbar ist, bzw. falls die zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$ bijektiv (oder injektiv oder surjektiv) ist (vgl. 14.18).

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen).

Bew: (a) folgt sofort aus (D2). (b) folgt leicht aus (D2) und (D3).

zu (c): Wegen (b) und (D2) ist

$$\begin{aligned} & \det(a_1, \dots, \underbrace{a_j}_{k}, \dots, \underbrace{a_k}_{j}, \dots, a_n) \\ = & \det(a_1, \dots, \underbrace{a_j + a_k}_{k}, \dots, \underbrace{a_k}_{j}, \dots, a_n) \\ = & \det(a_1, \dots, \underbrace{a_j + a_k}_{k}, \dots, \underbrace{-a_j}_{j}, \dots, a_n) \\ = & \det(a_1, \dots, \underbrace{a_k}_{k}, \dots, \underbrace{-a_j}_{j}, \dots, a_n) \\ = & -\det(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

zu (d): Es sei etwa die letzte Spalte Linearkombination der anderen Spalten. Wegen (D2) und (D3) gilt dann:

$$\det(a_1, \dots, a_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(a_1, \dots, a_{n-1}, a_j) = 0.$$

Wegen (d) muss man bei (e) nur noch zeigen: $\text{rg } A = n$ impliziert $\det(A) \neq 0$. Dazu bringen wir A durch elementare Spaltenumformungen (analog zu Zeilenumformungen, nur für Spalten statt für Zeilen) auf die Gestalt der Einheitsmatrix I_n . Dabei wird nach (D2) (für $b_j = 0$) und (b) und (c) $\det(A)$ nur mit Zahlen $\neq 0$ multipliziert. Wegen (D1) ist schließlich $\det(I_n) = 1 \neq 0$.

15.3 Der Fall $n = 2$

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (\text{das ist das } \delta \text{ aus 14.18}),$$

denn die Eigenschaften (D1) und (D3) sind klar, und (D2) ist leicht.

Beispiele: (1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3)(-4) = 0$, die Matrix ist nicht regulär.

Hierbei ist $a_{1k_0} = a_{1k_1}$ nach Voraussetzung. Wir erhalten A_{1k_1} aus A_{1k_0} , indem wir durch sukzessives Vertauschen benachbarter Spalten die $k_1 - 1$ -te Spalte (von A_{1k_0}) an die k_0 -te Stelle bringen. Dazu brauchen wir $k_1 - 1 - k_0 = k_1 - k_0 - 1$ Vertauschungen. Also ist

$$\det(A_{1k_1}) = (-1)^{k_1 - k_0 - 1} \det(A_{1k_0}).$$

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von der Form
$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix},$$
 also eine *untere Dreiecksmatrix*, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$.

15.6 Das Signum einer Permutation

Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Die Menge S_n aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ hat genau $n!$ Elemente.

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt man zweckmäßigerweise $(\overset{1}{\sigma(1)} \overset{2}{\sigma(2)} \cdots \overset{n}{\sigma(n)})$ oder auch nur $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$.

Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ definiert man das *Signum* (oder *Vorzeichen*) $\operatorname{sgn} \sigma$ von σ durch

$$\operatorname{sgn} \sigma := \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Das Produkt hat genau $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ Faktoren.

Bemerkung: (a) Es gilt stets $\operatorname{sgn} \sigma \in \{1, -1\}$, genauer ist $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^m$, wobei m die Anzahl der Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

(b) Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$. Das folgt aus

$$\frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

Beispiele: (1) Vertauscht $\tau \in S_n$ gerade zwei bestimmte Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ (eine solche Permutation heißt *Transposition*), so gilt $\operatorname{sgn} \tau = -1$, denn: Vertauscht τ etwa die Zahlen $i_0 < i_1$, so sind die Paare (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade (i_0, k) und (k, i_1) mit $i_0 < k < i_1$ und (i_0, i_1) . Das m in Bemerkung (a) ist also ungerade.

(2) Lässt sich σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ schreiben (dies ist tatsächlich für jede Permutation der Fall), so ist $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ für gerades m und $= -1$ für ungerades m . Das m ist dabei nicht eindeutig bestimmt!

(3) $n = 4$, $\sigma = (2, 3, 4, 1)$: Es ist $\operatorname{sgn} \sigma = -1$, zB da man durch drei Transpositionen die 1 nach vorne bekommt. Oder da die Paare (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade $(1, 4), (2, 4), (3, 4)$ sind.

15.7 Die Leibnizformel für Determinanten

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Einträgen a_{jk} . Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(ohne Beweis). Ebenfalls ohne Beweis:

Folgerung: Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von der Form $\begin{pmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, also eine *obere Dreiecksmatrix*, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$.

15.8 Determinantenentwicklungssatz

Die Formel in 15.5 nennt man *Entwicklung von $\det(A)$ nach der ersten Zeile von $A = (a_{jk})_{jk}$* . Da man weiss, was beim Vertauschen von Spalten geschieht, und wegen $\det(A) = \det(A^T)$, kann man $\det(A)$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Für jedes $l \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und der k -ten Spalte entsteht.

Beispiel: Man entwickelt möglichst nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, hier z.B. nach der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3 \cdot 6) = -8.$$

15.9 Determinantenmultiplikationssatz

Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

(ohne Beweis, ginge mit 15.7).

Insbesondere gilt für eine reguläre Matrix A : $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Interpretation: Die Matrix B habe die Spalten b_1, \dots, b_n . Der von diesen Spalten aufgespannte Spat hat das Volumen $\det(B)$. Dieser Spat wird von der zur Matrix A gehörenden linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ auf den von den Spalten Ab_1, \dots, Ab_n der Matrix AB aufgespannten Spat mit Volumen $\det(AB)$ abgebildet. Bildet man also mit der zur Matrix A gehörenden Abbildung einen beliebigen Spat ab, **so muss man dessen Volumen mit $\det(A)$ multiplizieren.**

15.10 Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b \in \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ habe. Wenn die Matrix A regulär ist, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, wobei für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$x_j = \det(a_1, \dots, \underbrace{b}_j, \dots, a_n) / \det(A).$$

Zur Berechnung der j -ten Komponente x_j der Lösung muss man also die j -te Spalte von A durch den Vektor b ersetzen, die Determinante berechnen und durch die Determinante von A dividieren.

Beweis: Wir haben $b = \sum_{l=1}^n x_l a_l$, also ist wegen (D2):

$$\det(a_1, \dots, \underbrace{b}_j, \dots, a_n) = \sum_{l=1}^n x_l \det(a_1, \dots, \underbrace{a_l}_j, \dots, a_n).$$

Wegen (D3) bleibt rechts nur der Summand für $l = j$ stehen, dh $x_j \det(A)$.

15.11 Eine Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Geht man zur Berechnung von A^{-1} wie in 14.18 vor und verwendet die Cramersche Regel 15.10, so erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\det(a_1, \dots, \underbrace{e_k}_j, \dots, a_n) \right)_{j,k=1}^n.$$

Die Formel für $n = 2$ in 14.18 ist ein Spezialfall.

15.12 Orientierung

Die Idee in 15.1 war, dass $\det(b_1, \dots, b_n)$ das Volumen des von $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spates beschreibt. Wegen (D2) (und (D1)) nimmt \det auch negative Werte an. Das eigentliche Volumen ist $|\det(b_1, \dots, b_n)|$. Aber auch das Vorzeichen von $\det(b_1, \dots, b_n)$ trägt Information.

Zwischenspiel: Ist V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so kann man φ eine Determinante $\det \varphi$ zuordnen, indem man eine Basis

b_1, b_2, \dots, b_n von V wählt, die Abbildung φ bzgl. dieser Basis durch eine Matrix A darstellt und $\det \varphi := \det(A)$ setzt.

Ist nämlich c_1, \dots, c_n eine weitere Basis von V , so erhalten wir die Darstellungsmatrix \tilde{A} von φ bzgl. dieser Basis als $\tilde{A} = S^{-1}AS$, wobei S die Darstellungsmatrix der Identität $V \rightarrow V$ ist, wenn man "vorne" die Basis c_1, \dots, c_n und "hinten" die Basis b_1, \dots, b_n nimmt. Wegen 15.9 ist dann

$$\det(\tilde{A}) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A) = \det \varphi,$$

dh die Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition: Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ heißt *orientierungstreu*, falls $\det \varphi > 0$ ist.

Eine geordnete Basis b_1, b_2, b_3 von \mathbb{R}^3 heißt *Rechtssystem*, falls $\det(b_1, b_2, b_3) > 0$ ist.

Satz: Ist b_1, b_2, b_3 ein Rechtssystem in \mathbb{R}^3 und $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientierungstreu, so ist auch $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3)$ ein Rechtssystem.

Beispiel: e_1, e_2, e_3 ist ein Rechtssystem, e_1, e_3, e_2 ist kein Rechtssystem.

15.13 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im \mathbb{R}^3

Für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das *Kreuzprodukt* $x \times y \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf x und y steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(x, y, x \times y) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

- (1) $e_1 \times e_2 = e_3$, allgemeiner $e_{\sigma(1)} \times e_{\sigma(2)} = \text{sgn } \sigma e_{\sigma(3)}$ für jede Permutation $\sigma \in S_3$.
- (2) $(\alpha x + \beta \tilde{x}) \times y = \alpha(x \times y) + \beta(\tilde{x} \times y)$ und $x \times (\alpha y + \beta \tilde{y}) = \alpha(x \times y) + \beta(x \times \tilde{y})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.
- (3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \times y = x \times (y + \alpha x) = (x + \alpha y) \times y,$$

dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

- (4) Es gilt $x \times y = 0$ genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.

Berechnung: Man berechnet $x \times y$ formal über eine Determinante

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Begründung: Bezeichnet man die rechte Seite mit z , so sieht man leicht $(z|x) =$

$\det(x, x, y) = 0$ und $(z|y) = \det(y, x, y) = 0$ ein. Außerdem ist

$$\det(x, y, z) = \det(z, x, y) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \|z\|^2 \geq 0.$$

Der Flächeninhalt a des von x, y aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $a = \|x\|\|y\|\sin\varphi$, wobei φ der von x und y eingeschlossene Winkel ist. Wegen $(x|y) = \|x\|\|y\|\cos\varphi$ erhalten wir

$$a^2 = \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2\varphi) = \|x\|^2\|y\|^2 - (x|y)^2.$$

Nun rechnet man nach, dass

$$\|z\|^2 + (x|y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$$

gilt (zur Übung empfohlen).

Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, x \times y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

Warnung: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ! So ist zB

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1, \quad e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0.$$

15.14 Das Spatprodukt

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ heißt $(x \times y) \cdot z = (x \times y|z)$ das *Spatprodukt* von x, y, z .

Satz: Es gilt $(x \times y) \cdot z = \det(x, y, z)$.

Beweis: Man weist sofort die Eigenschaften (D1)–(D3) der Determinante nach.

Ende
Woche 1

16 Eigenwerte, Diagonalisierung von Matrizen und Hauptachsentransformation

16.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A , falls es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x.$$

Jedes solche x heißt *Eigenvektor zum Eigenwert λ* (von A).

Der *Eigenraum von A zum Eigenwert λ* ist

$$E_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}.$$

Er besteht aus 0 und allen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ .

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ linear. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von φ , falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Jedes solche v heißt *Eigenvektor zum Eigenwert λ* (von φ). Den Eigenraum definiert man entsprechend.

Beachte: 0 ist kein Eigenvektor!

Beispiele: (1) 1 ist der einzige Eigenwert von I_n .

(2) Die Diagonalelemente d_1, d_2, \dots, d_n einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

sind Eigenwerte von D . Für $j = 1, \dots, n$ ist der j -te Einheitsvektor e_j ein Eigenvektor zum Eigenwert d_j .

(3) Die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert i mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten von nun an komplexe Matrizen.

16.2 Bemerkungen (geometrische Vielfachheit): Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $\text{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ist. In diesem Fall ist $E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_n)$.

(b) Zu jedem Eigenwert λ von A ist $E_A(\lambda)$ ein Untervektorraum von \mathbb{C}^n mit $m := \dim(E_A(\lambda)) \geq 1$. Die Zahl m heißt *geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ* .

(c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(d) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A , so gilt $k \leq n$ und

$$\dim(E_A(\lambda_1)) + \dim(E_A(\lambda_2)) + \dots + \dim(E_A(\lambda_k)) \leq n,$$

dh die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist höchstens n .

Beweis: (d) folgt aus (c). (c) zeigt man durch Induktion nach der Anzahl k verschiedener Eigenwerte. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ verschiedene Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren x_1, \dots, x_{k+1} . Zum Beweis von deren Unabhängigkeit seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j = 0$. Durch Multiplikation mit A bzw. mit λ_{k+1} folgt

$$0 = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j x_j \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_{k+1} x_j.$$

Durch Differenzbildung erhalten wir

$$0 = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) x_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) x_j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$ für $j = 1, \dots, k$, also $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \dots, k$ wegen $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$. Schließlich folgt auch $\alpha_{k+1} = 0$ wegen $x_{k+1} \neq 0$.

Beispiel: Die Matrix A aus Beispiel 16.1(3) hat genau die Eigenwerte $i, -i$ und es gilt $E_A(i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $E_A(-i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Die geometrische Vielfachheit von i und $-i$ ist also jeweils 1.

16.3 Charakteristisches Polynom und algebraische Vielfachheit

Definition: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Das *charakteristische Polynom* χ_A von A ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom vom Grad n (wg. 15.7).

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Nullstelle von χ_A ist (vgl 15.2(e) und 16.2(a)).

Definition: Die *algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes* λ von A ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A .

Bemerkung: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist immer \leq seiner algebraischen Vielfachheit.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und m_1, m_2, \dots, m_k die jeweiligen Vielfachheiten, so gilt $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (vgl. 5.4).

Beispiele: (1) Der Eigenwert 1 von I_n hat algebraische und geometrische Vielfachheit n : Es ist $A_{I_n}(1) = \mathbb{C}^n$ und $\chi_{I_n}(\lambda) = \det(I_n - \lambda I_n) = (1 - \lambda)^n$.

(2) In Beispiel 16.2 haben i und $-i$ jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Es ist $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$.

(3) Der Eigenwert 1 der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1: Es gilt $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = (\lambda - 1)^2$ und $E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

16.4 Ähnliche Matrizen

Definition: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.

Bemerkung: (a) Es gilt dann $A = SBS^{-1}$, denn

$$SBS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} A \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} = A.$$

(b) Sind A, B ähnlich und B, C ähnlich, so sind auch A, C ähnlich, denn $B = S^{-1}AS$ und $C = R^{-1}BR$ implizieren

$$C = R^{-1}S^{-1}ASR = (SR)^{-1}A(SR)$$

und mit S und R ist auch SR regulär.

(c) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante und dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist nämlich $B = S^{-1}AS$, so gilt $\det(B) = (\det(S))^{-1} \det(A) \det(S) = \det(A)$ und $\chi_B(\lambda) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I) = \chi_A(\lambda)$. Also sind Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten gleich. Weiter gilt für jeden Eigenwert λ von A :

$$\begin{aligned} E_A(\lambda) &= \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{C}^n : S^{-1}Ax = \lambda S^{-1}x\} \\ &= S(\{y \in \mathbb{C}^n : \underbrace{S^{-1}AS}_B y = \lambda y\}) = S(E_B(\lambda)), \end{aligned}$$

wobei wir $x = Sy$ geschrieben haben. Umgekehrt gilt $E_B(\lambda) = S^{-1}(E_A(\lambda))$. Da S regulär ist, haben $E_A(\lambda)$ und $E_B(\lambda)$ dieselbe Dimension.

Skizze:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \\ S \uparrow & & \downarrow S^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Man kann die Skizze so interpretieren, dass die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ in der durch die Spalten der regulären Matrix S gegebenen Basis durch die Matrix B dargestellt wird.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist regulär.

Es gilt $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}AS = B$. Also sind A, B ähnlich.

Ist die lineare Abbildung φ bzgl. der Standardbasis e_1, e_2 durch die Matrix A dargestellt, so wird φ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch die Matrix B dargestellt, dh φ streckt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 4 und in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 2.

16.5 Die Spur einer Matrix

Definition: Für $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiert man die *Spur* von A durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

Satz: (a) Für $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $\text{Spur}(AC) = \text{Spur}(CA)$.

(b) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

(c) Ist $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ das charakteristische Polynom der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gilt $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Spur}(A)$ und $a_0 = \det(A)$.

Beweis: (a) Gilt $C = (c_{kl})_{kl}$, so gilt

$$\text{Spur}(AC) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} a_{jk} \right) = \text{Spur}(CA).$$

(b) Unter Verwendung von (a) gilt für eine reguläre Matrix S :

$$\text{Spur}(\underbrace{S^{-1}AS}_{=C}) = \text{Spur}(SS^{-1}A) = \text{Spur}(A).$$

(c) $a_0 = \chi_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$. Aussage über a_{n-1} ohne Beweis.

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{=\det(A)} - \lambda \underbrace{(a + d)}_{=\text{Spur}(A)} + \lambda^2.$$

16.6 Diagonalisierung von Matrizen

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, dh falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so gibt, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel: Nach dem Beispiel in 16.4 ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar.

Bemerkung: Auf der Diagonalen von D müssen dann die Eigenwerte von A stehen, gemäß

ihrer algebraischen Vielfachheit wiederholt. Ist nämlich $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, so ist

jedes $d \in \{d_j : j = 1, \dots, n\}$ ein Eigenwert von D mit algebraischer Vielfachheit = Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $d_j = d$. Der Eigenraum zu d ist

$$E_D(d) = \text{Kern}(D - dI) = \text{lin}\{e_j : j \in \{1, \dots, n\}, d_j = d\},$$

also stimmt die geometrische Vielfachheit von d mit der algebraischen Vielfachheit überein.

Satz: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von A geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Eine entsprechende Matrix S erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Vektoren als Spalten s_1, s_2, \dots, s_n in eine Matrix S . Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor s_j , so erhält man $AS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2, \dots, \lambda_n s_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}AS = D$.

Beispiel: Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2,$$

also ist 4 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, und 1 ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Für die Eigenräume gilt

$$E_A(4) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

dh für jeden Eigenwert von A sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich und A ist diagonalisierbar. Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Folgende Eigenschaften sind ebenfalls äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

- (a) A hat n unabhängige Eigenvektoren, dh \mathbb{C}^n hat eine Basis aus Eigenvektoren von A .
- (b) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist n .

16.7 Orthogonale und unitäre Matrizen

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T A = I_n$ heißt *orthogonal*.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^* A = I_n$ heißt *unitär*.

Beispiele: Die Matrix $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ist unitär.

Bemerkung: (a) Eine unitäre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär, es gilt $A^{-1} = A^*$ und $|\det(A)| = 1$ (für eine orthogonale Matrix A gilt $A^{-1} = A^T$ und $\det(A) \in \{-1, 1\}$).

(b) Eine komplexe [bzw. reelle] Matrix ist genau dann unitär [bzw. orthogonal], wenn ihre Spalten (und dann auch ihre Zeilen) eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^n [bzw. des \mathbb{R}^n] bilden.

(c) Ist A unitär [bzw. orthogonal], so gilt $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ [bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$], dh **die zugehörige lineare Abbildung erhält Abstände**.

Beweis zu (b): Ist A unitär mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$, so gilt $A^* A = ((a_j | a_k))_{jk}$.

zu (c): Ist A unitär, so gilt für $x, y \in \mathbb{C}^n$ und $z := x - y$:

$$\|Ax - Ay\|^2 = \|Az\|^2 = (Az | Az) = (z | \underbrace{A^* A}_{=I} z) = (z | z) = \|x - y\|^2.$$

16.8 Symmetrische und hermitesche Matrizen

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = A^T$ heißt *symmetrisch*.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A = A^*$ heißt *hermitesch* oder *selbstadjungiert*.

Beispiele: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aus dem Beispiel in 16.4 ist symmetrisch. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$ ist hermitesch.

Satz: (a) Eine hermitesche Matrix A hat nur reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

(b) Jede hermitesche Matrix A läßt sich diagonalisieren, wobei die Matrix S unitär gewählt werden kann. Für reelle symmetrische Matrizen kann S orthogonal gewählt werden.

Beweis zu (a): Für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(Ax|x) = (x|A^*x) = (x|Ax) = \overline{(Ax|x)}, \text{ dh } (Ax|x) \in \mathbb{R}.$$

Sei λ ein Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda\|x\|^2 = (\lambda x|x) = (Ax|x) \in \mathbb{R}, \text{ also } \lambda = \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert mit Eigenvektor y , so gilt

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (Ax|y) = (x|Ay) = (x|\mu y) = \mu(x|y),$$

also $(x|y) = 0$ wegen $\lambda \neq \mu$.

Bemerkung: Allgemeiner gilt, dass sich eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ genau dann unitär diagonalisieren läßt, wenn sie *normal* ist, dh genau dann, wenn $AA^* = A^*A$ gilt.

Es sei noch der folgende tiefliegendere Satz angegeben:

16.9 Satz (Jordan-Normalform): Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ die folgende Blockmatrix-Struktur hat

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_j (*Jordanblock*) die Gestalt

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

hat, dh auf der Hauptdiagonalen steht bei J_j ein Eigenwert, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.

Insgesamt stehen in der *Jordannormalform* J auf der Diagonalen die Eigenwerte von A , gemäß ihren Vielfachheiten wiederholt und auf der Nebendiagonalen stehen nur Einsen und Nullen. Dabei ist die Anzahl der Einsen gerade n minus die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte.

Bemerkung: Die Spalten der Matrix S erhält man hier durch eine geeignete Wahl von Basen in den *Haupträumen* $\text{Kern}((A - \lambda I_n)^n)$, wobei λ die Eigenwerte von A durchläuft.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3$, dh 0 ist einziger Eigenwert mit

algebraischer Vielfachheit 3. Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$, also $\dim \text{Kern}(A) = 1$, $\dim(\text{Kern}(A^2)) = 2$ und $\dim(\text{Kern}(A^3)) = 3$.

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , wobei jeder Eigenwert gemäß seiner algebraischen Vielfachheit wiederholt sei. Dann gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad \text{und} \quad \text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

dh $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte und $\text{Spur}(A)$ ist die Summe der Eigenwerte.

16.10 Definitheit reeller symmetrischer Matrizen

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A x$, die zugehörige *quadratische Form*.

A heißt *positiv definit*, falls $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A heißt *negativ definit*, falls $x^T A x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A heißt *positiv semidefinit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^T A x \geq 0$.

A heißt *negativ semidefinit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^T A x \leq 0$.

A heißt *indefinit*, falls es $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $x^T A x > 0$ und $\tilde{x}^T A \tilde{x} < 0$.

Bemerkung: Ist $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt

$$q(x) = x^T A x = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$x^T A x = 3x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

Also ist A positiv definit.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt:

A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda \geq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist indefinit genau dann, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (gemäß algebraischer Vielfachheit wiederholt). Diagonalisiere A mit einer orthogonalen Matrix S : $S^T A S = D$, wobei D die Spalten $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n$ hat. Schreibe $x = S y$, wobei $y = (y_1, \dots, y_n)$. Dann ist $x = 0$ äquivalent zu $y = 0$ und

$$x^T A x = y^T S^T A S y = y^T D y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2.$$

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch. Dann ist A indefinit genau dann, wenn $\det(A) < 0$ ist.

A ist positiv definit genau dann, wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) > 0$ ist.

A ist negativ definit genau dann, wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) < 0$ ist.

Kriterium von Hurwitz: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle *Hauptunterdeterminanten* positiv sind, dh wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

für alle $m = 1, 2, \dots, n$ gilt.

16.11 Allgemeine quadratische Formen

Definition: Eine allgemeine quadratische Form $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Gestalt $q(x) = x^T A x + 2b^T x + c$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist und $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ sind.

Beispiel: $q(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 4x_1 + 2x_2 + 7 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7.$

16.12 Quadriken und Hauptachsentransformation

Sei $q(x) = x^T A x + 2b^T x + c$ eine allgemeine quadratische Form auf dem \mathbb{R}^n . Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) = 0\}$ heißt *Quadrik* und für $n = 2$ auch *Kegelschnitt*.

Für Quadriken gibt es bestimmte Normalformen.

Satz: Sei $q(x) = x^T Ax + 2b^T x + c$ eine allgemeine quadratische Form auf dem \mathbb{R}^n . Sei $r = \text{rg}(A)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die von Null verschiedenen Eigenwerte von A (gemäß ihrer Vielfachheit wiederholt). Dann gibt es eine orthogonale Matrix $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(V) = 1$ und einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Quadrik $\{y \in \mathbb{R}^n : q(Vy + p)\}$ durch eine der folgenden Gleichungen gegeben ist:

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + \beta = 0, \quad \text{falls } \text{rg}(A|b) = \text{rg}(A) = r,$$

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + 2\gamma y_n = 0, \quad \text{falls } \text{rg}(A|b) > \text{rg}(A) = r.$$

Bemerkung: Ist im ersten Fall $\beta \neq 0$, so kann man durch $-\beta$ dividieren und für jedes $j = 1, \dots, r$ Zahlen $\alpha_j > 0$ definieren durch $|\lambda_j/\beta| = \alpha_j^{-2}$. Sind v_1, v_2, \dots, v_n die Spalten von V , so heißen die Geraden $p + \text{lin}\{v_j\}$, $j = 1, \dots, r$, *Hauptachsen* und die zugehörigen α_j *Achsenabschnitte*.

Ende
Woche 2

Beweisidee: Im Fall $r < n$ setze $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Diagonalisiere A durch eine orthogonale Matrix V mit $\det(V) = 1$, dh $V^T AV = D$. Dann gilt für jeden Vektor $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{q}(y) := q(Vy + p) = y^T V^T AV y + 2(b^T + p^T A)Vy + q(p).$$

Dabei ist $y^T V^T AV y = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$. Wir können den linearen Term $2(b^T + p^T A)Vy$ eliminieren, wenn wir p finden mit $p^T A = -b^T$, dh wenn das lineare Gleichungssystem $A(-p) = b$ lösbar ist, dh wenn $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A) = r$ gilt. Das führt auf die erste Gleichung.

Der Fall $\text{rg}(A|b) > \text{rg}(A) = r$ ist komplizierter und führt auf die zweite Gleichung.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c = 24$ und $q(x) = x^T Ax + 2b^T x + c$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50,$$

also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 5$. Die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren v_1, v_2 und die entsprechende Matrix V sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $-Ap = b$ hat die eindeutige Lösung $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die neuen Koordinaten $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$q(p) = p^T A p + 2b^T p + c = -p^T b + 2b^T p + c = b^T p + c = -34 + 24 = -10$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik in den neuen Koordinaten $10y_1^2 + 5y_2^2 - 10 = 0$, also $y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} - 1 = 0$. Das ist eine Ellipse. Die Hauptachsen sind $p + \text{lin}\{v_1\}$, $p + \text{lin}\{v_2\}$ mit den Achsenabschnitten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = \sqrt{2}$.

17 Differentialgleichungen

17.1 Beispiel

Wir betrachten die Auslenkung (aus der Ruhelage) y eines an einer Feder befestigten Massepunktes mit der Masse m . Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Rückstellkraft F bei Auslenkung y proportional zu y und es gilt $F = -ky$, wobei k die Federkonstante ist. Nach Newton ist außerdem $F = ma$, wobei a die Beschleunigung des Massepunktes ist.

Betrachten wir y als Funktion der Zeit t , so ist $y'(t)$ die Geschwindigkeit des Massepunktes und $y''(t)$ seine Beschleunigung. Wir erhalten somit die folgende *Differentialgleichung*

$$my''(t) = -ky(t) \quad \text{bzw.} \quad y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$$

Dabei wird man erwarten, dass die *Anfangsbedingungen*

$$\begin{aligned} y(0) & \quad \text{Auslenkung zur Zeit } t = 0 \\ y'(0) & \quad \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t = 0 \end{aligned}$$

den Verlauf der *Lösung* $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beeinflussen.

Bemerkung: Bei uns wird die Variable, nach der differenziert wird, t oder x heißen.

17.2 Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Definition: Eine (explizite) Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (1)$$

wobei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Eine *Lösung* von (1) ist eine n -mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in I$ gilt:

- (i) $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in Q$
- (ii) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Ein *Anfangswertproblem* besteht aus einer Gleichung der Form (1) zusammen mit Anfangswertbedingungen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (2)$$

wobei $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in Q$ ist.

Eine Lösung des Anfangswertproblems (1), (2) ist eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (1) mit $x_0 \in I$, für die (2) gilt.

Im Beispiel aus 17.1 ist $n = 2$ und $f(x, z_0, z_1) = -\frac{k}{m}z_0$.

17.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y) \quad (1)$$

heißt Differentialgleichung *mit getrennten Veränderlichen* (oder *Variablen*). Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2)$$

mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ behandelt man wie folgt:

Fall $g(y_0) = 0$: Eine Lösung ist gegeben durch $y(x) = y_0$, $x \in I$.

Fall $g(y_0) \neq 0$: Ist $y : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) mit $g(y(x)) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{I}$, so gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad x \in \tilde{I},$$

und mittels Substitution $\eta = y(t)$, $d\eta = y'(t) dt$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^x \frac{y'(t) dt}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in \tilde{I}.$$

Nun löst man nach $y(x)$ auf. Lösungen sind eindeutig, solange man nicht über eine Nullstelle η_0 von g hinwegintegriert.

Beispiele: (1) $y' = a(x)y$, wobei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Setze $A(x) := \int_b^x a(t) dt$, $x \in I$, wobei $b \in I$ fest ist. Dann gilt $A' = a$ auf I und Lösungen sind gegeben durch $\ln |y(x)| = A(x) + \tilde{c}$, also durch

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Eindeutige Lösung mit der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}, \quad x \in I$$

(für $y_0 \neq 0$ kann nämlich die rechte Seite nicht Null werden).

(2) $y' = (1-y)y$ (logistisches Wachstum): Es ist klar, dass $y(x) = 0$ und $y(x) = 1$ Lösungen sind. Wir betrachten die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \in (0, 1)$ und erhalten

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{(1-\eta)\eta} = x - x_0.$$

Wir schreiben $((1-\eta)\eta)^{-1} = (1-\eta)^{-1} + \eta^{-1}$, so dass das linke Integral

$$= \ln \left(\frac{y(x)}{1-y(x)} \right) - \ln \left(\frac{y_0}{1-y_0} \right)$$

ist. Wir erhalten so

$$y(x) = 1 - \left(\frac{y_0}{1 - y_0} e^{x-x_0} + 1 \right)^{-1}, \quad x \in [x_0, \infty).$$

Die Lösung ist eindeutig (da $y(x) \in (0, 1)$ für alle x).

(3) $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. Eine Lösung ist gegeben durch $y(x) = 0$, eine andere Lösung durch $y(x) = x|x|/4$. Die zweite Lösung verläuft durch die Nullstelle von $g(y) = \sqrt{|y|}$. Es gibt noch weitere Lösungen dieses Anfangswertproblems.

17.4 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Fundamentale Eigenschaft linearer Differentialgleichungen:

Sind $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der *inhomogenen Gleichung*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{2}$$

so ist $w := y - z : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$y' = a(x)y, \tag{3}$$

(denn:

$$w' = y' - z' = ay + b - (az + b) = a(y - z) = aw).$$

Ist umgekehrt $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (3) und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (2), so ist auch $z := y + w : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (2).

Folgerung: (1) Wenn (1) lösbar ist, ist die Lösung eindeutig (vgl. Beispiel 17.3(1)).

(2) Ist y_P eine Lösung von (2), so gibt es zu **jeder** Lösung \tilde{y} von (2) ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{y}(x) = ce^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + y_P(x), \quad x \in \tilde{I}.$$

Setze $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$, $x \in I$. Eine Lösung $y_P : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (2) erhält man aus dem Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$y_P(x) = c(x)e^{A(x)}, \quad x \in I.$$

Die eindeutige Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt, \quad x \in I.$$

17.5 Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

Bei der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung hat die rechte Seite f in 17.1(1) die Form

$$f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = -a_{n-1}(x)z_{n-1} - \dots - a_1(x)z_1 - a_0(x)z_0 + b(x),$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I sind (es ist $Q = I \times \mathbb{R}^n$ hier). Die "inhomogene Gleichung" ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x), \quad x \in I \quad (1)$$

und die zugehörige homogene Gleichung ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad x \in I. \quad (2)$$

Bemerkung: Die "Fundamentale Eigenschaft" aus 17.4 gilt entsprechend, dh: sind y, z Lösungen von (1), so ist $y - z$ Lösung von (2); ist y Lösung von (1) und w Lösung von (2), so ist $y + w$ Lösung von (1).

Satz: Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem Vektor $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) &= b(x), \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Lösung ist n -mal stetig differenzierbar, dh $y \in C^n(I)$.

Bedeutung: Sei

$$\mathcal{L} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ löst (2)}\}.$$

Dann ist für jedes $x_0 \in I$ die lineare Abbildung $\psi_{x_0} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \mapsto (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$, bijektiv. Insbesondere hat \mathcal{L} die Dimension n . Jede Basis von \mathcal{L} (bestehend aus n Funktionen $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$) heißt *Fundamentalsystem* von (2).

Gegebene $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{L}$ sind linear unabhängig (und damit ein Fundamentalsystem) genau dann, wenn für ein (und dann für jedes) $x_0 \in I$ die Vektoren $\psi_{x_0}(\phi_1), \dots, \psi_{x_0}(\phi_n)$ linear unabhängig sind.

Ist ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Fundamentalsystem, so gibt es zu jeder Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (2) Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_n\phi_n(x), \quad x \in I.$$

Ist $y_P : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), so gibt es zu jeder Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (1) Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_P(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_n\phi_n(x), \quad x \in I.$$

Beispiel: In der Differentialgleichung $y''(x) + k/my(x) = 0$ ist $a_1(x) = 0$, $a_0(x) = k/m$ und $b(x) = 0$ (hier ist $I = \mathbb{R}$).

Ein Fundamentalsystem bilden z.B. $\phi_1(x) = \sin(\sqrt{k/m}x)$ und $\phi_2(x) = \cos(\sqrt{k/m}x)$.

Bemerkung: Sind die Funktionen $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ konstant, so spricht man von einer Differentialgleichung **mit konstanten Koeffizienten**.

17.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zur Lösung der homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

macht man den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, der auf

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

führt. Die linke Seite heißt *charakteristisches Polynom der Differentialgleichung*.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die *verschiedenen* Nullstellen des charakteristischen Polynoms, so sind die Funktionen $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung.

Bemerkung: Auch wenn die Koeffizienten a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 reell sind, sind die Nullstellen λ_j im allgemeinen komplex.

Ist jedoch $\lambda_j = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle, so ist auch $\bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ Nullstelle. In diesem Fall sind $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ zwei linear unabhängige Lösungen.

Bemerkung: Hat die reelle Nullstelle λ_j jeweils die Vielfachheit m_j , so sind

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}$$

m_j linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung.

Falls $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit m_j ist, so ist auch $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ Nullstelle der Vielfachheit m_j und die $2m_j$ Funktionen

$$e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \dots, x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x)$$

sind linear unabhängig.

Auf diese Weise erhält man aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung ein Fundamentalsystem.

Beispiele: Ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ ist gegeben durch $e^{-2x}, x e^{-2x}$ (das charakteristische Polynom ist hier $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ und -2 ist doppelte Nullstelle).

Ein Fundamentalsystem der Gleichung $y^{(4)} - y = 0$ ist gegeben durch $e^x, e^{-x}, \sin x, \cos x$ (das charakteristische Polynom ist $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ und die (einfachen) Nullstellen sind $i, -i, 1, -1$).

17.7 Variation der Konstanten für Gleichungen n -ter Ordnung

Sei $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ein Fundamentalsystem von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

wobei $n \geq 2$ ist. Zur Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x), \quad x \in I,$$

wobei $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, macht man den Ansatz

$$y_P = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x) + \dots + c_n(x)\phi_n(x), \quad x \in I.$$

Verlangt man

$$\sum_{k=1}^n c'_k \phi_k^{(j)} = 0$$

auf I für $j = 0, 1, \dots, n-2$, so erhält man als n -te Gleichung

$$\sum_{k=1}^n c'_k \phi_k^{(n-1)} = b \quad \text{auf } I.$$

Wir schreiben die n Gleichungen als System:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{=: \Phi(x)} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Nach 17.5 ist die Matrix $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für jedes $x \in I$ invertierbar, also

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \Phi(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I.$$

Im Fall $n = 2$ erhalten wir etwa

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_2(x)\phi_1'(x)} \begin{pmatrix} -\phi_2(x)b(x) \\ \phi_1(x)b(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen c_1, c_2, \dots, c_n erhält man durch Integration.

Beispiel: Die Funktionen $\phi_1(x) = e^x$, $\phi_2(x) = e^{-x}$ bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' - y = 0$. Hier gilt $\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1' = -2$. Für eine Lösung y_P von

$$y'' - y = b(x),$$

wobei $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sei, erhalten wir nach dem obigen Ansatz $c_1'(x) = e^{-x}b(x)/2$ und $c_2'(x) = -e^x b(x)/2$. Eine Lösung ist somit gegeben durch

$$y_P(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t) dt - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t) dt, \quad x \geq 0.$$

Man verifiziere, dass dies tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist.

17.8 Ansätze für spezielle rechte Seiten

Die Variation der Konstanten aus 17.7 gibt zwar Lösungen für *beliebige* rechte Seiten $b(x)$, ist aber etwas unhandlich.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Hat die rechte Seite $b(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung die Gestalt

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) e^{\alpha x} \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$$

so führt der Ansatz

$$y_P(x) = [(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m) \cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m) \sin(\beta x)] e^{\alpha x},$$

falls $p(\alpha + i\beta) \neq 0$ gilt, bzw.

$$y_P(x) = x^\nu [(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m) \cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m) \sin(\beta x)] e^{\alpha x},$$

falls $\alpha + i\beta$ eine Nullstelle der Ordnung ν von p ist, zu einer Lösung y_p der inhomogenen Gleichung. Man beachte, dass α und/oder β hierbei = 0 sein können (im Falle $\alpha = 0$ ist der Exponentialterm = 1, im Falle $\beta = 0$ ist $\cos(\beta x) = 1$ und $\sin(\beta x) = 0$).

Beispiel: Im Beispiel 17.1 schreiben wir $\omega := \sqrt{k/m} > 0$ und betrachten also die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = b(x)$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$. Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist gegeben durch $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$. Die äußere Anregung sei von der Form $b(x) = \sin(\mu x)$.

Fall $\mu^2 \neq \omega^2$: Der Ansatz $y_P = \alpha \sin(\mu x) + \beta \cos(\mu x)$ führt auf $y_P'' = -\mu^2 y_P$ und weiter auf $\alpha = 0$ und $\beta = (\omega^2 - \mu^2)^{-1}$. Somit erhalten wir $y_P(x) = (\omega^2 - \mu^2)^{-1} \sin(\mu x)$ als eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die eindeutige Lösung der inhomogenen Gleichung mit den Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$ ist dann

$$y(x) = \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \sin(\mu x) - \frac{\mu}{\omega(\omega^2 - \mu^2)} \sin(\omega x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist auf $[0, \infty)$ beschränkt.

Fall $\mu = \omega$: Der Ansatz $y_P(x) = \alpha x \cos(\omega x) + \beta x \sin(\omega x)$ führt (nach Rechnung) auf $\beta = 0$ und $\alpha = -1/(2\omega)$. Somit erhalten wir $y_P(x) = -\frac{x}{2\omega} \cos(\omega x)$ als eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die eindeutige Lösung y der inhomogenen Gleichung mit den Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$ ist dann

$$y(x) = -\frac{x}{2\omega} \cos(\omega x) + \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösung ist auf $[0, \infty)$ **nicht beschränkt!** Die äußere Anregung mit der *Eigenfrequenz* des Systems führt hier zur *Resonanzkatastrophe*.

Man zeige, dass für $\mu \rightarrow \omega$ die Lösung des Anfangswertproblems mit rechter Seite $\sin(\mu x)$ gegen die Lösung mit rechter Seite $\sin(\omega x)$ konvergiert (für jedes feste $x > 0$).

Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage in Satz 17.5 bringen wir zunächst ein für diese Zwecke oft verwendetes Lemma.

17.9 Gronwall-Lemma: Sei $I = [0, b]$ ein Intervall und $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gebe $\alpha \geq 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) \leq \beta + \alpha \int_0^x h(t) dt, \quad x \in I.$$

Dann gilt $h(x) \leq \beta e^{\alpha x}$ für alle $x \in I$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen $h(x) < (\beta + \varepsilon)e^{\alpha x} =: g(x)$ auf I . Da dies für $x = 0$ stimmt und die Funktionen stetig sind, gibt es anderenfalls ein $x_0 \in (0, b]$ mit $h(x) < g(x)$ für $x \in [0, x_0)$ und $h(x_0) = g(x_0)$. Wir haben dann aber (wg. $\alpha \geq 0$)

$$h(x_0) < \beta + \varepsilon + \alpha \int_0^{x_0} h(t) dt \leq \beta + \varepsilon + \alpha \int_0^{x_0} g(t) dt = \beta + \varepsilon + [(\beta + \varepsilon)e^{\alpha t}]_0^{x_0} = g(x_0)$$

im Widerspruch zu $h(x_0) = g(x_0)$.

17.10 Eindeutigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung (Bonus)

Wir behandeln den Fall $x_0 = 0$. Sei $b > 0$. Sind y, z Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) &= b(x), \quad x \in [0, b] \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

so ist $\phi := y - z$ eine Lösung der homogenen Gleichung mit Anfangswerten $\phi(0) = \phi'(0) = \dots = \phi^{(n-1)}(0) = 0$.

Wir setzen $h(x) := \sum_{j=0}^{n-1} |\phi^{(j)}(x)|^2$. Dann ist $h(0) = 0$ und

$$h'(x) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \phi^{(j)}(x)\phi^{(j+1)}(x).$$

Die Koeffizienten a_j der Differentialgleichung sind auf $[0, b]$ beschränkt, etwa durch K . Wir schätzen mithilfe der Differentialgleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ab

$$|\phi^{(n)}(x)|^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j(x)| |\phi^{(j)}(x)| \right)^2 \leq nK^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\phi^{(j)}(x)|^2$$

und verwenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung nochmals:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \phi^{(j)}(x)\phi^{(j+1)}(x) \leq \sqrt{1 + nK^2} \sum_{j=0}^{n-1} |\phi^{(j)}(x)|^2 = \sqrt{1 + nK^2} h(x).$$

Also gilt $h'(x) \leq 2\sqrt{1 + nK^2} h(x)$ und wir erhalten durch Integration (beachte $h(0) = 0$):

$$h(x) \leq 2\sqrt{1 + nK^2} \int_0^x h(t) dt, \quad x \in [0, b].$$

Wir wenden das Gronwall-Lemma mit $\beta = 0$ und $\alpha = \sqrt{1 + nK^2}$ an und beachten $h(x) \geq 0$. Wir erhalten $h(x) = 0$ auf $[0, b]$.

Somit gilt $y = z$ auf $[0, b]$.

17.11 Inhomogenitäten mit Sprüngen

In linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung treten in Anwendungen auch Inhomogenitäten $b(x)$ mit Sprüngen auf, z.B. stückweise konstante Funktionen. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) &= b(x), \\ y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

auf dem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $I = [a, T] \subset \mathbb{R}$ und verlangen, dass es $t_1 < \dots < t_N$ in I so gibt, dass die Funktion b auf $I \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$ stetig ist und für jedes $j = 1, \dots, N$ die einseitigen Grenzwerte $b(t_j \pm)$ existieren, aber $b(t_j -) \neq b(t_j +)$ ist.

Wir können die Differentialgleichung sukzessive auf den Teilintervallen $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N], [t_N, T]$ lösen, wobei wir jeweils die “Endwerte” der Lösung auf dem vorigen Intervall als Anfangswerte für das folgende Intervall nehmen. Die Lösung y ist dann $n - 1$ -mal stetig differenzierbar auf I und n -mal stetig differenzierbar auf $I \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$. In den Punkten t_1, \dots, t_N ist $y^{(n-1)}$ **nicht** differenzierbar, aber die einseitigen Grenzwerte $y^{(n)}(t_j \pm)$ existieren und sind durch die Differentialgleichung gegeben.

Ende
Woche 3

Beispiel: Wir betrachten $y'' - y = b(x)$ auf $[0, \infty)$ mit $b(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1] \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$ und verwenden die Formel aus dem Beispiel in 17.7. Die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = y'(0) = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = \int_0^x \sinh(x-t)b(t) dt = \begin{cases} \cosh x - 1 & , x \in [0, 1] \\ \cosh x - \cosh(x-1) & , x > 1 \end{cases}$$

An der Stelle $x = 1$ ist y' nicht differenzierbar.

18 Fourierreihen

18.1 T -periodische Funktionen

Definition: Sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt T -periodisch, falls $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Es gilt dann auch $f(x + kT) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: (a) Eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte auf einem Intervall $[a, a + T)$ kennt (hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig). Jede Funktion $\tilde{f} : [a, a + T)$ lässt sich eindeutig zu einer T -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}$ auf $[a, a + T)$ fortsetzen.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische Funktion, so ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $g(x) := f(\frac{T}{2\pi}x)$, eine 2π -periodische Funktion. Wir werden uns i.w. auf 2π -periodische Funktionen beschränken.

Beispiele: $\sin x$, $\cos x$ und e^{ix} definieren 2π -periodische Funktionen. Die Funktion $x \mapsto \cos(2x)$ ist 2π -periodisch, aber auch π -periodisch.

18.2 Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Für jedes $x \in [a, b]$ ist $f(x)$ eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch $u(x) := \operatorname{Re}(f(x))$ und $v(x) := \operatorname{Im}(f(x))$ werden Funktionen $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit $f(x) = u(x) + iv(x)$ für alle $x \in [a, b]$ (Bezeichnungen $u =: \operatorname{Re} f$, $v =: \operatorname{Im} f$).

Die Funktion f heißt (Riemann-)integrierbar, falls u **und** v integrierbar sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Das Integral ist \mathbb{C} -linear, dh: Ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere integrierbare Funktion und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Analog heißt f differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$, falls u **und** v differenzierbar in x_0 sind, und in diesem Falle ist $f'(x_0) := u'(x_0) + iv'(x_0)$ (Ableitung von f in x_0).

Auch die Ableitung ist \mathbb{C} -linear. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel, wobei in der Kettenregel für $f \circ g$ die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertig ist, aber $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ reellwertig.

Folgerung: Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

Erinnerung: Für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ ist

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v).$$

Beispiele: (1) Für $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{wx} dx = \frac{e^{wb} - e^{wa}}{w}.$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{wx} &= \frac{d}{dx} (e^{ux} (\cos(vx) + i \sin(vx))) = u e^{ux} (\cos(vx) + i \sin(vx)) + e^{ux} (-v \sin(vx) + iv \cos(vx)) \\ &= (u + iv) e^{ux} (\cos(vx) + i \sin(vx)) = w e^{wx} \end{aligned}$$

folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz.

(2) Für $l, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases}$$

(3) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, die über beschränkten Intervallen integrierbar ist, so gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Wir werden 2π -periodische Funktionen meist auf $[-\pi, \pi)$ betrachten und über dieses Intervall integrieren.

18.3 Trigonometrische Polynome

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *trigonometrisches Polynom*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$, gibt mit

$$f(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Ein trigonometrisches Polynom f der obigen Form ist 2π -periodisch, und es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = c_k \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.$$

18.4 Fourierkoeffizienten einer Funktion

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, die über $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist (bzw. auch nur $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar). Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(k) := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

der k -te Fourierkoeffizient, und $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt Folge der Fourierkoeffizienten von f .

Fourier (1822): Für jede 2π -periodische Funktion f sollte ihre *Fourierreihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

gegen f konvergieren.

Es hat einige Zeit gedauert, diese Idee zu präzisieren (geeigneter Integralbegriff, verschiedene Konvergenzbegriffe etc).

18.5 Absolut summierbare Fourierkoeffizienten

Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$. Dann lässt sich durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

eine 2π -periodische stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren, die insbesondere über $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist. Es gilt

$$\hat{f}(k) = c_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Somit ist hier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mithilfe der folgenden Eindeutigkeitsaussage:

Bemerkung: Sind f, g stetig und 2π -periodisch mit $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so gilt $f = g$ auf \mathbb{R} .

erhält man auch:

Folgerung: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -periodisch und gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$, so ist

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Konvergenz ist hier sogar gleichmäßig.

Beispiele: (1) Wir betrachten die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch $f(x) := x$ für $x \in [-\pi, \pi)$ definiert ist.

Es gilt $\hat{f}(0) = 0$. Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} x \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx}_{=0} = \frac{(-1)^k i}{k}.$$

Die Funktion f ist nicht stetig und es gilt $\sum_k |\hat{f}(k)| = \infty$.

(2) Sei die 2π -periodische Funktion f auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Für $k = 0$ ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{2}{ik} \frac{(-1)^k i}{k} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.$$

Hier gilt $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$, also

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikx}, \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere erhält man für $x = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

18.6 "Reelle" Fourierkoeffizienten

Für 2π -periodische Funktionen f definiert man häufig auch

$$a_k := a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_k := b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Diese Fourierkoeffizienten haben den Vorteil, dass sie für reellwertiges f auch reell sind.

Umrechnungsregeln: Es gilt $c_0 = a_0/2$ und für $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ muss man ersetzen durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Auch die Summanden dieser Reihe ist für reellwertiges f reell.

Beispiele: (1) Im Beispiel 18.5(1) ist $c_{-k} = -c_k$ für $k \geq 1$, also $a_k = 0$ für $k \geq 0$ und $b_k = 2c_k = 2(-1)^{k+1}/k$ für $k \geq 1$. Die Fourierreihe ist eine reine Sinus-Reihe (das liegt daran, dass die Funktion **ungerade** ist).

(2) Im Beispiel 18.5(2) ist $c_k = c_{-k}$, also $b_k = 0$ und $a_k = 2c_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}$. Die Fourierreihe ist eine reine Cosinus-Reihe (was daran liegt, dass die Funktion **gerade** ist).

Bemerkung: Ist f gerade, dh $f(-x) = f(x)$ für $x \in (-\pi, \pi)$, so gilt

$$b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^x f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ist f ungerade, dh $f(-x) = -f(x)$ für $x \in (-\pi, \pi)$, so gilt

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^x f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

18.7 Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen

Definition: Eine 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

(a) *stückweise stetig*, falls es

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \dots, n-1$ gilt:

- (i) $f : (x_j, x_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig,
- (ii) die einseitigen Grenzwerte $f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)$ und $f(x_{j+1}-) = \lim_{x \rightarrow x_{j+1}-} f(x)$ existieren in \mathbb{C} .

(b) *stückweise glatt*, falls es

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \dots, n-1$ gilt:

- (i) $f : (x_j, x_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar,
- (ii) die einseitigen Grenzwerte $f(x_j+)$, $f(x_{j+1}-)$ und $f'(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f'(x)$, $f'(x_{j+1}-) = \lim_{x \rightarrow x_{j+1}-} f'(x)$ existieren in \mathbb{C} .

In den Punkten x_j muss f nicht stetig sein, der Funktionswert $f(x_j)$ spielt keine Rolle.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig. Ist f stetig differenzierbar, so ist f stückweise glatt.

Ist f stückweise stetig, so existieren in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$.

Beispiele: (1) Die Funktionen in den Beispielen 18.5(1) und (2) sind stückweise glatt.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch mit $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, \pi) \\ -1 & , x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Dann ist f stückweise glatt.

18.8 Darstellungssatz für 2π -periodische Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stückweise glatt. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Ist f stetig in x , so konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$.

Bemerkung: Ist f 2π -periodisch, stückweise glatt und **stetig**, so befinden wir uns in der Situation von 18.5, dh es gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$.

Beispiel: Für die 2π -periodische Funktion f mit $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 18.6(1) $b_k = 2(-1)^{k+1}/k$ für $k \geq 1$. Also ist

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

da f in diesen Punkten stetig ist.

An der Stelle $x = \pi$ ist f unstetig. Setzt man $x = \pi$ in die Reihe rechts ein, so erhält man den Wert 0. In der Tat ist $f(\pi-) = \pi$, $f(\pi+) = f(-\pi+) = -\pi$ und also $\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0$.

Beispiele zu 18.7: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und gegeben durch

(a) $f(x) = \ln|x|$ für $x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ und $f(0) = 0$. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \notin \mathbb{C}$ ist f **nicht** stückweise stetig. Da f nicht beschränkt ist, ist f über $[-\pi, \pi]$ nicht integrierbar.

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}$ für $x \in [-\pi, \pi)$. Dann ist f stetig auf \mathbb{R} . Wegen $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \infty \in \mathbb{C}$ und $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -\infty$ ist f aber **nicht** stückweise glatt. Der Darstellungssatz 18.8 lässt sich auf f **nicht** anwenden.

18.9 Skalarprodukt und Orthogonalität

Auf dem \mathbb{C} -Vektorraum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen komplexwertigen Funktionen definiert

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

ein *Skalarprodukt* (vgl. 14.19, beachte dass $f = 0$, wenn $(f|f) = 0$ gilt, da f stetig ist). Die zugehörige *Norm* (vgl. 14.19), gegeben durch

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f|f)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

heißt *L^2 -Norm*.

Bemerkung: Man kann diese Definitionen ausdehnen auf Funktionen, die über $[-\pi, \pi]$ integrierbar sind. Jedoch gilt dann nicht mehr, dass $\|f\|_2 = 0$ schon $f = 0$ impliziert! Ein Beispiel ist etwa f , gegeben durch $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$.

Definiert man für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion e_k durch $e_k(x) := e^{ikx}$, so ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein *Orthonormalsystem*, dh $(e_k|e_l) = \delta_{kl}$ (vgl. 14.20). Für integrierbares $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann $\hat{f}(k) = (f|e_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Anhand dieser Eigenschaften rechnet man nach:

Satz: Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 + \|f - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k\|_2^2.$$

und für alle Koeffizienten $(\gamma_k)_{|k| \leq n}$ in \mathbb{C} gilt:

$$\|f - \sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k\|_2^2 = \|f - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k) - \gamma_k|^2,$$

was bedeutet, dass $\sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k$ bzgl. der L^2 -Norm die beste Approximation von f in $\text{lin}\{e_k : |k| \leq n\}$ ist.

Beweis: Wir erinnern an

$$(a|b) = 0 \implies \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2,$$

was für jedes Skalarprodukt und die zugehörige Norm gilt. In beiden Fällen ist $a = f - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k$. Im ersten Fall ist $b = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k$ und im zweiten Fall ist $b = \sum_{k=-n}^n (\hat{f}(k) - \gamma_k)e_k$.

Es reicht zu zeigen, dass für beliebige $(\mu_k)_{|k| \leq n}$ und $g = \sum_{k=-n}^n \mu_k e_k$ gilt:

$$(a|g) = 0 \quad \text{und} \quad \|g\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\mu_k|^2.$$

Das rechnet man nach:

$$\|g\|_2^2 = \left(\sum_k \mu_k e_k \middle| \sum_l \mu_l e_l \right) = \sum_k \sum_l \mu_k \overline{\mu_l} \underbrace{(e_k|e_l)}_{=\delta_{kl}} = \sum_k |\mu_k|^2$$

und

$$\begin{aligned} (a|g) &= (f - \sum_k \hat{f}(k)e_k | \sum_l \mu_l e_l) = \sum_l \overline{\mu_l} (f|e_l) - \sum_k \sum_l \hat{f}(k) \overline{\mu_l} \underbrace{(e_k|e_l)}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_l \hat{f}(l) \overline{\mu_l} - \sum_k \hat{f}(k) \overline{\mu_k} = 0. \end{aligned}$$

Besselsche Ungleichung: Ist $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Dies folgt aus dem Satz. Entsprechendes gilt für beliebige Orthonormalsysteme. Für das hier vorliegende Orthonormalsystem gilt aber sogar die

Parsevalsche Gleichheit: Ist $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2.$$

Insbesondere konvergiert die Fourierreihe $\sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Funktion f in der L^2 -Norm, dh $\|f - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man sagt: die Fourierreihe konvergiert *im quadratischen Mittel* gegen die Funktion f .

Bemerkung: Die Umrechnungsregeln aus 18.6 zeigen, dass für reellwertige Funktionen f gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)^2 + b_k(f)^2).$$

Bemerkung: Die Frage, ob man zu jeder Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ eine Funktion f findet mit $\hat{f}(k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, führt über die Vorlesung hinaus. (Das geht tatsächlich: \rightarrow Lebesgue-Integral, $\rightarrow L^2(-\pi, \pi)$). Die Eigenschaften hier in 18.9 gelten auch noch für *quadratintegrierbare* Funktionen f , dh für Funktionen, für die f und $|f|^2$ über $(-\pi, \pi)$ uneigentlich integrierbar sind.)

19 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir schreiben hier Vektoren x im \mathbb{R}^n mit den Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n als n -Tupel (x_1, \dots, x_n) oder als Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Gelegentlich schreiben wir der Deutlichkeit halber \vec{x} .

Für $n = 2, 3$ schreiben wir häufig $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

19.1 Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}^n

Definition: Eine Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in \mathbb{R}^n heißt *konvergent*, falls es einen Vektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\|x^k - x^0\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben dann $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$ oder $x^k \rightarrow x^0$ ($k \rightarrow \infty$).

Bemerkung: Wegen $\|\vec{y}\|^2 = \sum_{j=1}^n |y_j|^2$ gilt:

$$\vec{x}^k \rightarrow \vec{x}^0 \quad (k \rightarrow \infty) \iff \text{für alle } j = 1, \dots, n: \vec{x}_j^k \rightarrow \vec{x}_j^0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Beispiel: Sei $\vec{x}^k := \begin{pmatrix} e^{-k} \\ 1 - 1/k \end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\vec{x}^k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $k \rightarrow \infty$.

19.2 Offene und abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^n

Definition: Ist $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$, so heißt

$$K(x^0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < r\}$$

offene Kugel um x^0 mit Radius r .

Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es zu jedem $x^0 \in Q$ ein (von x^0 abhängiges) $r > 0$ gibt mit $K(x^0, r) \subseteq Q$.

Beispiele: \mathbb{R}^n ist offen. Offene Kugeln sind offen. Der Würfel $(0, 1)^n$ ist offen.

Beweis für offene Kugeln: Wir zeigen, dass $K(y^0, s)$ offen ist. Dazu sei $x^0 \in K(y^0, s)$, dh $\|x^0 - y^0\| < s$. Wir setzen $r := s - \|x^0 - y^0\|$ (Idee aus Skizze) und zeigen $K(x^0, r) \subseteq K(y^0, s)$. Dazu sei $x \in K(x^0, r)$, dh $\|x - x^0\| < r$. Dann gilt

$$\|x - y^0\| = \|x - x^0 + x^0 - y^0\| \leq \|x - x^0\| + \|x^0 - y^0\| < r + \|x^0 - y^0\| = s,$$

also $x \in K(y^0, s)$.

Ende
Woche 4

Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Satz: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A , die in \mathbb{R}^n konvergiert, der Grenzwert $\lim_k x^k$ wieder zu A gehört.

Beispiele: \mathbb{R}^n ist abgeschlossen. Endliche Mengen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kugeln

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$$

sind abgeschlossen.

19.3 Stetigkeit von Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$, die *Komponentenfunktionen von f* mit

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Definition: Die Funktion f heißt *stetig in $x^0 \in D$* , falls für alle Folgen $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in D mit $x^k \rightarrow x^0$ gilt: $f(x^k) \rightarrow f(x^0)$. Wir schreiben dafür auch

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0).$$

f heißt *stetig in D* , falls f in **jedem** $x^0 \in D$ stetig ist.

Beispiel: Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$.

Dann ist f in D stetig: sei $(x_0, y_0) \in D$ und $(x_k), (y_k)$ Folgen mit $x_k \rightarrow x_0, y_k \rightarrow y_0$. Dann gilt auch $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ und (wegen $x_0 > 0$ und der Stetigkeit von \arctan) $\arctan(y_k/x_k) \rightarrow \arctan(y_0/x_0)$. Also $f(x_k, y_k) \rightarrow f(x_0, y_0)$.

Bemerkung: Wegen 19.1 ist f stetig in x^0 (bzw. in D) genau dann, wenn jede Komponentenfunktion $f_j, j = 1, \dots, m$, stetig in x^0 (bzw. in D) ist.

Beispiele: (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. f ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. f ist aber in $(0, 0)$ nicht stetig, denn für $x_k = y_k = 1/k$ gilt

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{2x_k^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x|y|^\beta(x^2 + y^2)^{-1} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, wobei $\beta > 1$. Die Funktion ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. f ist auch $(0, 0)$ stetig, denn wegen

$|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ gilt

$$|f(x, y)| = \frac{|y|^{\beta-1}}{2} \frac{2|xy|}{x^2 + y^2} \leq |y|^{\beta-1}/2 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

(3) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist ϕ stetig. Wegen $\|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})\| = \|\phi(\vec{x} - \vec{y})\|$ reicht es, Stetigkeit in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ zu zeigen. Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\phi(\vec{x})\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \phi(\vec{e}_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\phi(\vec{e}_j)\| \leq \|\vec{x}\| \sqrt{\sum_{j=1}^n \|\phi(\vec{e}_j)\|^2}.$$

Für $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$ gilt also $\|\phi(\vec{x})\| \rightarrow 0$.

(4) Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig. Die Addition $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind stetig, des weiteren Skalarprodukt, Matrix-Vektor-Produkt, Multiplikation von Matrizen, Determinante und Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 . Auch die auf den regulären Matrizen erklärte Matrixinversion ist stetig (Cramersche Regel!).

Satz: (a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ gilt: $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

(b) Sei D offen. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge Q von \mathbb{R}^m die Menge $f^{-1}(Q)$ (das Urbild von Q) offen ist.

Beispiel: Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist die Menge $M_b := \{(x, y) \neq (0, 0) : xy/(x^2 + y^2) < b\}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 : $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := xy/(x^2 + y^2)$, ist stetig in D , $Q_b := (-\infty, b)$ ist offene Teilmenge von \mathbb{R} . Also ist $f^{-1}(Q_b) = M_b$ nach dem Satz offen.

19.4 Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Definition: Die Funktion f heißt *differenzierbar in* $t_0 \in I$, falls es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = a.$$

In diesem Fall heißt a *Ableitung von f in t_0* , geschrieben $f'(t_0) := a$. Ableitungen nach einem reellen Parameter t schreibt man auch gerne mit Punkt, also $\dot{f}(t_0)$.

f heißt *differenzierbar in I* , falls f in **jedem** $t_0 \in I$ differenzierbar ist, und f heißt *stetig differenzierbar in I* oder *eine C^1 -Funktion*, falls $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zusätzlich stetig ist.

Bemerkung: Wegen 19.1 ist f differenzierbar in t_0 [bzw. in I] genau dann, wenn jede Komponentenfunktion f_j , $j = 1, \dots, n$, differenzierbar in t_0 [bzw. in I] ist. Es gilt dann

$$\dot{f}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig genau dann, wenn alle $\dot{f}_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, stetig sind.

Beispiele: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben durch

(1) $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ mit $r > 0$ und $I = [0, 2\pi]$ (Kreisrand um $(0, 0)$ mit Radius r). Dann gilt $\dot{x}(t) = -r \sin t$, $\dot{y}(t) = r \cos t$, und f ist C^1 .

(2) $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$ mit $I = [0, \infty)$ (*logarithmische Spirale*). Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \\ \dot{y}(t) &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, \end{aligned}$$

und f ist C^1 .

19.5 Raumkurven

Definition: Eine *Raumkurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Meist ist I von der Form $[a, b]$. Die Menge $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Spur von γ* oder *Bild von γ* .

Sind $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurven, so heißt γ_2 eine *Umparametrisierung von γ_1* , falls es eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung $\phi : I \rightarrow J$ gibt, für die $\phi^{-1} : J \rightarrow I$ ebenfalls stetig differenzierbar ist und für die gilt

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad t \in I.$$

Insbesondere haben γ_1 und γ_2 dieselbe Spur. Die Bemerkung in 19.4 und die Kettenregel aus HM I zeigen, dass dann außerdem gilt:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \dot{\gamma}_2(\phi(t))\dot{\phi}(t), \quad t \in I.$$

Ist ϕ monoton wachsend [bzw. fallend], heißt die Umparametrisierung *orientierungserhaltend* [bzw. *orientierungsumkehrend*].

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für jedes $t \in I$ gilt. Damit ist auch jede Umparametrisierung regulär.

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, und *doppelpunktfrei*, falls $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist.

Beispiele: (1) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Dann ist γ_1 regulär. Wegen $\dot{\gamma}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist γ_2 nicht regulär. Insbesondere ist γ_2 keine Umparametrisierung von γ_1 , obwohl γ_1 und γ_2 dieselbe Spur haben.

(2) Sei $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $\gamma_2 : [-\pi/2, 5\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Dann haben γ_1 und γ_2 dieselbe Spur. γ_1 ist regulär und γ_2 ist nicht regulär. γ_2 durchläuft das Bild von γ_1 dreimal.

19.6 Bogenlänge von Raumkurven: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Raumkurve, so ist ihre *Länge* (oder *Bogenlänge*) gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Bemerkung: (a) $L(\gamma)$ ändert sich nicht unter Umparametrisierung.

(b) Eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ lässt sich nach der Bogenlänge s parametrisieren:

$$\psi(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b],$$

ist streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Die Umkehrabbildung $\phi : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ ist also ebenfalls C^1 und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$ hat die Eigenschaft

$$\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = 1 \quad \text{für alle } s \in [0, L(\gamma)].$$

Diese Parametrisierung heißt auch *natürliche Parametrisierung*. Häufig behält man den Buchstaben γ bei und schreibt einfach $\gamma(s)$, Ableitungen nach der Bogenlänge s werden üblicherweise mit Strich geschrieben.

Beispiele: Die Abbildungen aus Beispiel 19.4(1) und (2) sind Raumkurven.

(1) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$. Dann gilt (vgl. 19.4):

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Das ist der Umfang eines Kreises mit Radius r . Die natürliche Parametrisierung ist wegen

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \int_0^t r d\tau = r t$$

hier gegeben durch $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$.

(2) Für die logarithmische Spirale $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$ berechnen wir unter der Verwendung der Formel für $\dot{\gamma}(t)$ aus Beispiel 19.4(2):

$$L(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{2}.$$

Hier gilt für $t \geq 0$:

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \sqrt{2} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Auflösung nach t ergibt

$$t = -\ln \frac{\sqrt{2} - s}{\sqrt{2}} = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - s}.$$

Die natürliche Parametrisierung ist hier also

$$\tilde{\gamma} : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \cos \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \\ \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \sin \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \end{pmatrix}.$$

19.7 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Definition: f heißt in $x^0 \in D$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}$$

in \mathbb{R}^m existiert. $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ heißt *Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung v* .

Bemerkung: Da D offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $x^0 + tv \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Setzt man $g(t) = f(x^0 + tv)$, $|t| < \delta$, so ist $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \dot{g}(0)$ (vgl 19.4).

19.8 Partielle Ableitungen

In der Situation von 19.7 heißen Richtungsableitungen von f in Richtung der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n *partielle Ableitungen von f* , dh

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(x^0) \quad \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_k \text{ im Punkt } x^0$$

für $k = 1, \dots, m$. Man schreibt oft auch nur $f_{x_k}(x^0)$.

Beispiele: (1) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ ist offen. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{-x} \cos y + \ln z$. In jedem Punkt existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Hier wurde jeweils in der Notation das Argument (x, y, z) unterdrückt!

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$. Sei $v = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Richtung. Es gilt für $t \neq 0$:

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{1}{t} \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Der Limes für $t \rightarrow 0$ existiert in \mathbb{R} genau dann, wenn $\xi\eta = 0$ ist, dh genau dann, wenn $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ ist. Also existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ genau dann, wenn v ein Vielfaches von e_1 oder ein Vielfaches von e_2 ist.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{1/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$. Für $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ gilt hier

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{t^3 \xi |\xi|^{1/2} |\eta|^{3/2}}{t^3 \xi^2 + \eta^2}$$

und wir erhalten für $t \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial(\xi, \eta)}(0, 0) = \frac{\xi |\xi|^{1/2} |\eta|^{3/2}}{\xi^2 + \eta^2}$$

für jede Richtung $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$.

Übung: Existiert in x^0 die Richtungsableitung von f in Richtung v und ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}(x^0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(x^0).$$

19.9 Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, sowie $x^0 \in D$. Idee der Differenzierbarkeit in 19.4 (und in HM I) war im Fall $n = 1$:

$$f(x) \approx f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) \quad \text{für } x \text{ nahe } x^0.$$

Dabei ist $f'(x^0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$, dh $h \mapsto f'(x^0)h$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition: f heißt *differenzierbar* in $x^0 \in D$ (gelegentlich *total differenzierbar* in x^0), falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\frac{\|f(x) - f(x^0) - A(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x^0)$$

bzw.

$$\frac{\|f(x^0 + h) - f(x^0) - Ah\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

In diesem Fall ist die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt und heißt *Ableitung von f in x^0* , Bezeichnung: $f'(x^0) := A$. Andere Bezeichnungen: $Df(x^0)$, $J_f(x^0)$, *Jacobimatrix*, *Funktionalmatrix*. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

f heißt *differenzierbar in D* , falls f in **jedem** $x^0 \in D$ differenzierbar ist.

Satz: (a) Ist f differenzierbar in x^0 , so ist f stetig in x^0 .

(b) Ist f differenzierbar in x^0 , so existieren in x^0 alle Richtungsableitungen von f und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = f'(x^0)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'(x^0)e_k \quad k\text{-te Spalte von } f'(x^0), k = 1, \dots, n,$$

und

$$f'(x^0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^0) \right)_{j=1, k=1}^{m \quad n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Im Fall $m = 1$ ist also

$$f'(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (\text{Zeilenvektor}).$$

Ende
Woche 5

Beispiele: (1) Die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) ist **nicht** differenzierbar in $(0, 0)$, da in $(0, 0)$ nicht alle Richtungsableitungen existieren.

(2) Die Funktion f aus Beispiel 19.8(3) ist **nicht** differenzierbar in $(0, 0)$: Es gilt $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. Wäre f differenzierbar in $(0, 0)$, so wäre $f'(0, 0) = (0 \ 0)$ und somit $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 0$. Nach Beispiel 19.8(3) ist aber $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 1/2 \neq 0$.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{1/2}y^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ist in $(0, 0)$ differenzierbar: Zunächst berechnen wir $f_x(0, 0) = 0$ und $f_y(0, 0) = 0$. Unser Kandidat für $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ist also $A := (0 \ 0)$. Nun schätzen wir ab:

$$\frac{\|f(x, y) - f(0, 0) - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|^{3/2}y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \leq |x|^{1/2} \rightarrow 0$$

für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist f in $(0, 0)$ differenzierbar, und es gilt $f'(0, 0) = (0 \ 0)$.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = Bx$, wobei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Für $x, h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x + h) - f(x) = B(x + h) - Bx = Bx + Bh - Bx = Bh.$$

Wir wählen also $A := B$ in der Definition und erhalten, dass f auf \mathbb{R}^n differenzierbar ist mit $f'(x) = B$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ konstant.

(5) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^T B x$, wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch sei. Dann gilt für $x, h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^T B(x+h) - x^T B x = x^T B h + \underbrace{h^T B x}_{=x^T B h} + h^T B h = 2x^T B h + h^T B h.$$

Die Abbildung $h \mapsto 2x^T B h$ ist linear, und es gilt

$$|f(x+h) - f(x) - 2x^T B h| = |h^T B h| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|h\|^2$$

(vergleiche Beweis in 16.10: Die Abschätzung ist klar, wenn B eine Diagonalmatrix ist. Ist B keine Diagonalmatrix, so diagonalisiere B durch eine orthogonale Matrix S , dh $D = S^T B S$ bzw. $B = S D S^T$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |h^T B h| &= |h^T S D S^T h| = |(S^T h) D (S^T h)| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } D\} \cdot \|S^T h\|^2 \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|h\|^2 \end{aligned}$$

wegen $\|S^T h\| = \|h\|$.)

19.10 Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition: f heißt in D *partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D existieren, und *stetig partiell differenzierbar* in D , falls die partiellen Ableitungen zusätzlich auf D stetig sind.

Satz: Sei f auf D partiell differenzierbar und $x^0 \in D$. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in x^0 , so ist f in x^0 differenzierbar.

Definition: Eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar*, geschrieben $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) gilt $f_x = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ und $f_y = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.

19.11 Ableitungen höherer Ordnung

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert die partielle Ableitung $\partial f / \partial x_k$, so kann $\partial f / \partial x_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sein. Man gelangt so gegebenenfalls zu *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0).$$

Entsprechend werden (falls vorhanden) Ableitungen höherer Ordnung definiert.

Schreibweisen: $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = f_{xxy}$ etc.

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig (partiell) differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ auf D existieren und dort stetig sind. Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^k(D, \mathbb{R})$.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt k -mal stetig differenzierbar, $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, falls für alle Komponentenfunktionen f_j , $j = 1, \dots, m$ gilt: $f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$.

Satz von Schwarz: Ist $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, so sind partielle Ableitungen einer Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) existieren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Also ist $f \in C^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Man schreibt dafür auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$.

19.12 Der Gradient

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in D , so ist der *Gradient von f in $x^0 \in D$* der Vektor der partiellen Ableitungen in x^0 , also

$$\text{grad } f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt statt $\text{grad } f(x^0)$ auch $\nabla f(x^0)$ ("Nabla f "), wobei der Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als *Differentialoperator* verstanden wird, der auf die reellwertige Funktion f wirkt und daraus die vektorwertige Funktion $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ macht.

Bemerkung (Zusammenhang mit der Ableitung): Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ in D differenzierbar, so gilt für $x^0 \in D$:

$$\text{grad } f(x^0) = f'(x^0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$$

(beachte $f'(x^0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$).

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^0 \in D$ differenzierbar und $\text{grad } f(x^0) \neq 0$. Dann gilt für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$:

$$-\|\text{grad } f(x^0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \leq \|\text{grad } f(x^0)\|.$$

Dabei gilt Gleichheit rechts genau dann, wenn $v = \text{grad } f(x^0) / \|\text{grad } f(x^0)\|$ ist (dh “der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f ”).

Außerdem steht $\text{grad } f(x^0)$ senkrecht auf der *Niveaulinie* $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x^0)\}$.

Beweis: Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \stackrel{19.9}{=} f'(x^0)v = (\text{grad } f(x^0))^T v = (\text{grad } f(x^0)) \cdot v.$$

Nun verwendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

19.13 Kettenregel

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$. Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $f(D) \subset G$, und sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $y^0 := f(x^0)$. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in x^0 , und es gilt:

$$\underbrace{(g \circ f)'(x^0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(x^0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \underbrace{f'(x^0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(“äußere Ableitung mal innere Ableitung”).

Beispiele: (1) Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann ist $F \circ \phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto F(\phi(t))$ differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ \phi)'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\phi(t)) \phi_j'(t), \quad t \in I,$$

wobei $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von ϕ sind. Ist $n = 3$ und

schreibt man $F(x, y, z)$, $\phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und $\tilde{F}(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, so gilt

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sowie $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := f(Bx)$. Dann gilt

$$\underbrace{\nabla F(x)}_{\in \mathbb{R}^m} = F'(x)^T = (f'(Bx)B)^T = B^T (f'(Bx))^T = \underbrace{B^T}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{(f'(Bx))^T}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

19.14 Der Umkehrsat

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x^0 \in D$ und $f'(x^0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **regulär**. Dann gibt es offene Mengen U und V mit $x^0 \in U \subset D$, $y^0 := f(x^0) \in V$ derart, dass $f : U \rightarrow V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y)) \right)^{-1}, \quad y \in V.$$

Bemerkung: Die Eigenschaft *regulär* ersetzt hier für $n > 1$ die Bedingung $f'(x_0) \neq 0$, die im Fall $n = 1$ vorausgesetzt werden muss.

ACHTUNG: Der Satz besagt nur, dass es **lokal** eine Umkehrfunktion zu f gibt. Auf ganz D muss dies nicht gelten!

Beispiel: Sei $D := (0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Dann ist D offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, sowie

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\det f'(r, \varphi) = r > 0$ ist $f'(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$ regulär, und nach dem Umkehrsatz ist f lokal bijektiv.

Andererseits ist $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$, dh $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist nicht injektiv. Es ist $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aber $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** bijektiv.

19.15 Der Satz über implizit definierte Funktionen

Motivation: Die Gleichung $y - x^2 = 0$ lässt sich eindeutig nach y auflösen durch $y = x^2$. Die Auflösung von $x - y^2 = 0$ nach y ist hingegen global nicht mehr möglich.

Für gegebene (x_0, y_0) mit $x_0 - y_0^2 = 0$ und $y_0 > 0$ bzw. $y_0 < 0$ ist diese Auflösung lokal noch möglich (durch $y = \sqrt{x}$ bzw. $y = -\sqrt{x}$ für (x, y) nahe (x_0, y_0)). Jedoch ist in keiner Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eine Auflösung durch eine **Funktion** möglich.

Satz: Sei $n > m$, $p := n - m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit Komponentenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben die Variablen in \mathbb{R}^n als (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^m$, sowie

$$f'(x, y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(x, y) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

wobei wir den linken Block als $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und den rechten Block als $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bezeichnen.

Ist $(x^0, y^0) \in D$ mit $f(x^0, y^0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)$ **regulär** (dh $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$), so gibt es offene Umgebungen U von x^0 und V von y^0 , sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$g : U \rightarrow V$ derart, dass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt: $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ und

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x),$$

dh durch die Funktion $g : U \rightarrow V$ ist (lokal um (x_0, y_0)) eine eindeutige Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y gegeben (bzw. $\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\}$ ist Graph der Funktion $g : U \rightarrow V$).

Bemerkung: Ableitungen von g kann man nach der Kettenregel aus

$$f(x, g(x)) = 0, \quad x \in U,$$

berechnen: es ist

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x), \quad x \in U,$$

also

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)), \quad x \in U.$$

Beispiele: (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$ für alle x_0, y_0 mit $f(x_0, y_0) = 0$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sinh(yz) + (z - x)^2 - 1 \\ \cos^2(\pi y) + z - x^2/2 \end{pmatrix}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$.

Hier gilt

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix regulär ist und $f(2, 0, 1) = 0$ gilt, ist in einer Umgebung von $(2, 0, 1)$ eine Auflösung des Gleichungssystems $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach y und z (jeweils als Funktion von x) möglich. Dh es gibt Funktionen $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung U von 2, und eine offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 1)$ derart, dass für alle $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ ist dabei C^1 mit

$$g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0, 1) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) (siehe 17.3) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sowie $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ mit $g(y_0) \neq 0$. Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

muss man

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

nach y auflösen. Setzt man

$$F(x, y) := \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} - \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

so ist $F \in C^1$ und man muss $F(x, y) = 0$ nach y auflösen. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$$

ist dies in einer Umgebung von (x_0, y_0) nach dem Satz möglich.

Als Bonus:

Beweisidee 19.15 \Rightarrow 19.14: Setze $F(x, y) = y - f(x)$. Es ist $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -f'(x)$ regulär. Also kann man $y - f(x) = 0$ lokal nach x auflösen. Die Auflösung ist f^{-1} .

Beweisidee 19.14 \Rightarrow 19.15: Setze $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Dann ist $F'(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x^0, y^0)$. Wegen $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$ ist $F'(x^0, y^0)$ regulär. Setze $g(x) :=$ zweite Komponente von $F^{-1}(x, 0)$. Dann gilt:

$$y = g(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = F^{-1}(x, 0) \Leftrightarrow F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x, y) = 0.$$

19.16 Der Satz von Taylor

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $l \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{l+1}(D, \mathbb{R})$ und $x^0 \in D$.

Für $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$h \cdot \nabla := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$(h \cdot \nabla) f(x^0) := h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \text{grad } f(x^0) \cdot h$$

und

$$(h \cdot \nabla)^2 := \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (h \cdot \nabla)^2 f(x^0) := \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0).$$

Entsprechend definiert man für $k = 1, 2, \dots, l + 1$:

$$(h \cdot \nabla)^k := \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k, \quad (h \cdot \nabla)^k f(x^0) := \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k=1}^n h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(x^0).$$

Beispiel: Für $n = 2$, $h = (h_1, h_2)$ und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ hat man also

$$(h \cdot \nabla)^2 f = h_1^2 f_{xx} + h_1 h_2 f_{xy} + h_2 h_1 f_{yx} + h_2^2 f_{yy} = h_1^2 f_{xx} + 2h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}.$$

Zur allgemeinen Betrachtung von $(h \cdot \nabla)^2 f(x^0)$ definieren wir die *Hesse-Matrix von f in x^0*

$$H_f(x^0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x^0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x^0) \\ f_{x_2 x_1}(x^0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x^0) & \cdots & f_{x_n x_n}(x^0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) \right)_{j,k=1}^n.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(x^0)$ symmetrisch, wenn $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Damit ist

$$(h \cdot \nabla)^2 f(x^0) = h^T H_f(x^0) h.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$S[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$$

die *Verbindungsstrecke* von x und y .

Satz von Taylor: Unter den obigen Voraussetzungen seien $x^0 \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $S[x^0, x^0 + h] \subseteq D$. Dann gibt es ein $\xi \in S[x^0, x^0 + h]$ mit

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \frac{1}{1!} (h \cdot \nabla) f(x^0) + \frac{1}{2!} (h \cdot \nabla)^2 f(x^0) + \dots + \frac{1}{l!} (h \cdot \nabla)^l f(x^0) + \frac{1}{(l+1)!} (h \cdot \nabla)^{l+1} f(\xi).$$

Bemerkung: (a) Für $l = 0$ erhält man einen mehrdimensionalen Mittelwertsatz.

(b) Der Ausdruck

$$T_{l, x^0}(h) := f(x^0) + \sum_{k=1}^l \frac{(h \cdot \nabla)^k f(x^0)}{k!}$$

heißt *l-tes Taylorpolynom von f in x^0* . Statt h schreibt man auch $x - x^0$.

(c) Für $l = 1$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ erhalten wir, wenn $h \in \mathbb{R}^n$ mit $S[x^0, x^0 + h] \subset D$:

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \text{grad } f(x^0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(\xi) h$$

für ein $\xi \in S[x^0, x^0 + h] \subset D$. Schreibt man $x - x^0$ statt h , so ist $x^0 + h = x$.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xe^y - 2}$ und $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $f_x = e^y f$, $f_y = xe^y f$, sowie $f_{xx} = e^{2y} f$, $f_{xy} = e^y(f + f_y) = (e^y + xe^{2y})f$, $f_{yy} = xe^y(f + f_y) = (xe^y + x^2e^{2y})f$. Wir erhalten

$$f(2, 0) = 1, f_x(2, 0) = 1, f_y(2, 0) = 2, f_{xx}(2, 0) = 1, f_{xy}(2, 0) = 3, f_{yy}(2, 0) = 6,$$

und damit ist das zweite Taylorpolynom von f in $(2, 0)$ gegeben durch

$$T_{2,(2,0)}(h_1, h_2) = 1 + 1 \cdot h_1 + 2h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + 3h_1h_2 + 3h_2^2$$

bzw., wenn man $h_1 = x - 2$ und $h_2 = y$ berücksichtigt, durch

$$1 + (x - 2) + 2y + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3(x - 2)y + 3y^2.$$

19.17 Lokale Extremstellen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition: f hat in $x^0 \in D$ ein *lokales Maximum* [bzw. *lokales Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $K(x^0, \delta) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x^0)$ [bzw. $f(x) \geq f(x^0)$] für alle $x \in K(x^0, \delta)$ gilt.

Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Satz über lokale Extremstellen: Sei $x^0 \in D$.

(a) Hat f in x^0 ein lokales Extremum und ist f in x^0 partiell differenzierbar, so ist $\text{grad } f(x^0) = 0$.

(b) Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\text{grad } f(x^0) = 0$. Dann gilt:

- (i) Ist $H_f(x^0)$ positiv definit, so hat f in x^0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist $H_f(x^0)$ negativ definit, so hat f in x^0 ein lokales Maximum.
- (iii) Ist $H_f(x^0)$ indefinit, so hat f in x^0 **kein** lokales Extremum, sondern einen *Sattelpunkt*.

Beispiel für einen Sattelpunkt: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Dann ist $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt nur für $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Für die Hessematrix gilt $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat eine negative Determinante und ist daher indefinit (siehe 16.10). Somit hat f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Für (x, y) im ersten oder dritten Quadranten ist $f(x, y) = xy > 0$, für (x, y) im zweiten oder vierten Quadranten ist $f(x, y) = xy < 0$.

Bemerkung: Trifft in (b) keiner der Fälle (i), (ii) oder (iii) zu, so ist $H_f(x^0)$ (positiv oder negativ) **semidefinit** (vgl. 16.10), und es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Nullstellen des Gradienten heißen auch *kritische Punkte*.

Im Beweis von (b) verwendet man Bemerkung 19.16(c), dh

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + h^T H_f(\xi)h,$$

und die Tatsache, dass man wegen $f \in C^2$ ein $\delta > 0$ so findet, dass $H_f(\xi)$ für $\xi \in K(x^0, \delta)$ dieselben Definitheitseigenschaften wie $H_f(x^0)$ hat.

Beispiel: $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. Hier gilt

$$f_x = 3x^2 - 12y, \quad f_y = -12x + 24y^2.$$

Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{aligned} 3x^2 - 12y &= 0 \\ -12x + 24y^2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x^2 &= 4y \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \begin{aligned} y^4 &= y \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \\ &\iff \begin{aligned} y &\in \{0, 1\} \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det H_f(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = -24 < 0,$$

also ist $H_f(0, 0)$ indefinit und f hat in $(0, 0)$ **kein** lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt. Weiter ist

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

wegen $\det H_f(2, 1) > 0$ und $12 > 0$ positiv definit (siehe 16.10). Also hat f in $(2, 1)$ ein lokales Minimum.

Ende
Woche 6

19.18 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$ und $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ mit Komponentenfunktionen $h_1, h_2, \dots, h_p : D \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $S := \{x \in D : h(x) = 0\}$.

Man sagt " f hat in $x^0 \in D$ ein lokales Maximum [Minimum] unter der Nebenbedingung $h = 0$ ", falls $x^0 \in S$ und es ein $\delta > 0$ gibt mit $K(x^0, \delta) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x^0)$ [bzw. $f(x) \geq f(x^0)$] für alle $x \in K(x^0, \delta) \cap S$.

Häufig ist S abgeschlossen (siehe 19.2) und *beschränkt*, dh es gibt $K \in \mathbb{R}$ mit $\|x\| \leq K$ für alle $x \in S$.

Satz: Ist $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(S)$ abgeschlossen und beschränkt und es gibt $a, b \in S$ mit

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \text{für alle } x \in S.$$

(Vergleiche mit 8.14.)

Beispiel: Seien $n = 3$, $p = 2$ und $D = \mathbb{R}^3$, sowie

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x + z - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind f, h stetig differenzierbar auf D und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}.$$

Die Menge S ist abgeschlossen (für eine Folge (x_k, y_k, z_k) in S mit $(x_k, y_k, z_k) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x_0, y_0, z_0) \in S$) und beschränkt: Sind $(x, y, z) \in S$, so gilt $x^2 + y^2 = 2$ und somit $|x| \leq \sqrt{2}$. Also ist $|z| = |1 - x| \leq 1 + |x| \leq 1 + \sqrt{2}$ und $\|(x, y, z)\| \leq \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})^2} =: K$.

Nach dem Satz gibt es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ mit $f(\vec{a}) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{b})$ für alle $\vec{v} \in S$.

19.19 Multiplikatorenregel von Lagrange

Seien n, D, n, f, p, h und S wie in 19.18. Setze

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) := f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \dots + \lambda_p h_p(x)$$

für $x \in D$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ($L : D \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lagrangefunktion*).

Satz: Hat f in $x^0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $h = 0$ und gilt

$$\text{rg} \underbrace{h'(x^0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = p \quad [h'(x^0) \text{ hat vollen, dh maximalen, Rang}],$$

so gibt es $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ (*Lagrangemultiplikatoren*) mit

$$\text{grad} L(x^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0) = 0.$$

Bemerkung: (a) Beachte, dass die Zeilen von $h'(x^0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ gerade $\text{grad} h_1(x^0)^T, \text{grad} h_2(x^0)^T, \dots, \text{grad} h_p(x^0)^T$ sind. Die Voraussetzung an den Rang von $h'(x^0)$ bedeutet also, dass $\text{grad} h_1(x^0), \text{grad} h_2(x^0), \dots, \text{grad} h_p(x^0)$ linear unabhängig sind.

(b) Die Bedingung $\text{grad} L = 0$ stellt ein Gleichungssystem mit $n + p$ Gleichungen für die $n + p$ Unbekannten $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0$ dar, nämlich

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x^0), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$) und

$$h_j(x^0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$, diese sind gleichbedeutend mit $x^0 \in S$).

(c) Zur Bestimmung der Extrema versucht man, dieses Gleichungssystem zu lösen. Kann man den Satz anwenden, so findet man die gesuchten Extremstellen unter den Lösungen dieses Gleichungssystems. Kann man den Satz **nicht** anwenden, so ist dies **nicht sicher!**

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels aus 19.18): Wir wissen schon, dass es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ gibt mit: f hat in \vec{a} [bzw. in \vec{b}] ein globales Minimum [bzw. Maximum] unter der Nebenbedingung $h = 0$.

Wir haben

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $\text{rg } h'(x, y, z) < 2$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y, z) \in S$ wegen $x^2 + y^2 = 2$ nicht vorkommt. Also ist

$$\text{rg } h'(x, y, z) = 2 \quad \text{für alle } (x, y, z) \in S,$$

und die Voraussetzungen des Satzes sind insbesondere in \vec{a} und \vec{b} erfüllt. Hier ist

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

und

$$L_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2, \quad L_y = 1 + 2\lambda_1 y, \quad L_z = 1 + \lambda_2, \quad L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2, \quad L_{\lambda_2} = x + z - 1.$$

Man erhält $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 \neq 0$, $x = 0$, $z = 1$ und $y = \pm\sqrt{2}$ (der genaue Wert von λ_1 ist nicht wichtig).

Wegen $f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = 1 \pm \sqrt{2}$ ist $\vec{a} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ die Minimal- und $\vec{b} = (0, \sqrt{2}, 1)$ die Maximalstelle. Der maximale Wert von f auf S ist $f(\vec{b}) = 1 + \sqrt{2}$ und der minimale Wert von f auf S ist $f(\vec{a}) = 1 - \sqrt{2}$.

19.20 Rotation, Divergenz, Laplace

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Skalarfeld (auf D)* und eine Funktion $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld (auf D)*.

Bemerkung: Ist $f \in C^1$ ein Skalarfeld auf D , so ist $\text{grad } f = \nabla f$ ein Vektorfeld auf D .

Partielle Ableitungen schreiben wir im folgenden als

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Definition: Sei $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld auf D mit Komponentenfunktionen $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definiert man die *Divergenz von \vec{v}* durch

$$\operatorname{div} \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j$$

und im Fall $n = 3$ die *Rotation von \vec{v}* durch

$$\operatorname{rot} \vec{v} := \nabla \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: (a) $\operatorname{div} \vec{v}$ ist ein Skalarfeld und $\operatorname{rot} \vec{v}$ ist ein Vektorfeld.

(b) Vektorfelder mit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ heißen *quellenfrei* und Vektorfelder mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ heißen *wirbelfrei*.

(c) Für C^2 -Skalarfelder $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man den *Laplaceoperator* durch

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f := \nabla \cdot \nabla f := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f,$$

und für C^2 -Vektorfelder $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiele: (1) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$. Dann gilt $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = n$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Im Falle $n = 3$ gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ auf \mathbb{R}^3 .

(2) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, sowie $g := f \circ A$, dh $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$. Dann gilt $\Delta g = (\Delta f) \circ A$:

Wir schreiben hier für $D\vec{v}$ statt \vec{v}' für die Ableitung eines Vektorfelds \vec{v} . Es gilt dann

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Spur}(D\vec{v}).$$

Nun haben wir nach der Kettenregel (siehe 19.13):

$$\begin{aligned} \Delta g &= \operatorname{div}(\nabla g) = \operatorname{div}(A^T(\nabla f) \circ A) \\ &= \operatorname{Spur}(D(A^T(\nabla f) \circ A)) = \operatorname{Spur}(A^T D((\nabla f) \circ A)) \\ &= \operatorname{Spur}(A^T((D(\nabla f)) \circ A)A). \end{aligned}$$

Nach Satz 16.5(a) ist dies

$$= \text{Spur}(((D(\nabla f)) \circ A) \underbrace{AA^T}_{=I_n}) = \text{Spur}((D(\nabla f)) \circ A) = (\text{div}(\nabla f)) \circ A = (\Delta f) \circ A.$$

Bedeutung: Ist $Jf := f \circ A$, so gilt $\Delta f = J^{-1}\Delta Jf$ für jede C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dh Δ ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

19.21 Rechenregeln

Produktregeln: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\ \nabla \cdot (f\vec{v}) &= f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ \nabla \times (f\vec{v}) &= f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v} \quad (n=3) \\ \Delta(fg) &= (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g) \quad (f, g \in C^2). \end{aligned}$$

Zum Nachrechnen wende man die eindimensionale Produktregel aus HM I auf die einzelnen partiellen Ableitungen an:

$$\partial_j(\phi\psi) = (\partial_j\phi)\psi + \phi(\partial_j\psi).$$

Hintereinanderausführung: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$. Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 -Funktionen, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } f) &= \vec{0}, & \text{dh} \quad \nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\ \text{div}(\text{rot } \vec{v}) &= 0 & \text{dh} \quad \nabla \cdot (\nabla \vec{v}) &= 0 \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{v}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Regeln folgen aus dem Satz von Schwarz.

19.22 Potentialfelder

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Potentialfeld* (oder *Gradientenfeld*, *konservatives Feld*), falls ein C^1 -Skalarfeld (ein *Potential*) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\vec{v} = \nabla f$ auf D .

Bemerkung: (a) Wegen 19.21 ist ein C^1 -Potentialfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ wirbelfrei in D .

(b) Nach dem Satz von Schwarz gilt für ein C^1 -Potentialfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\vec{v}'(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = \vec{v}'(\vec{x})^T, \quad \vec{x} \in D,$$

dh für alle $j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \text{auf } D.$$

20 Kurvenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^2

20.1 Kurvenintegrale von Skalarfeldern

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ (siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ Vektoren aus \mathbb{R}^n sind).

Bemerkung: (a) Ist $\tilde{\gamma}$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von γ (siehe 19.5), so gilt $\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds$.

(b) Für $f = 1$ ist $\int_{\gamma} ds$ die Länge von γ (vgl. 19.6). “ $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ ” heißt *skalares Linienelement* von γ .

(c) Ist γ wie oben und setzt man $\rho : [a, b] \rightarrow D$, $\rho(t) := \gamma(a + b - t)$, so durchläuft ρ die Spur von γ in umgekehrter Richtung. Diese Kurve wird auch mit $-\gamma$ bezeichnet. Es gilt dann

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

(d) Sind $\gamma_j : [a_{j-1}, a_j] \rightarrow D$, $j = 1, 2, \dots, m$, reguläre Kurven mit $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$, so bezeichnet man auch $\gamma : [a_0, a_m] \rightarrow D$, $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_{j-1}, a_j]$, als *Kurve*. In den Punkten a_1, a_2, \dots, a_{m-1} muss γ nicht differenzierbar sein, dh die rechts- und linksseitigen Ableitungen in diesen Punkten müssen nicht übereinstimmen. Man schreibt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ und definiert

$$\int_{\gamma} f ds := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f ds.$$

(e) Ist γ geschlossen, so schreibt man auch

$$\int_{\gamma} f ds = \oint_{\gamma} f ds.$$

20.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ (siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

(beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ Vektoren aus \mathbb{R}^n sind und dass \cdot das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n bezeichnet).

“ $d\vec{s} = \dot{\gamma}(t) dt$ ” heißt *vektorielles Linienelement* von γ .

Bemerkung: Mit $\vec{T}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ (Tangenteneinheitsvektor an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$) haben wir “ $d\vec{s} = \vec{T}(t) ds$ ” (vgl. 20.1) und also

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (\vec{v} \cdot \vec{T}) ds$$

(dazu betrachte man \vec{T} als Funktion auf der Spur von γ , was jedenfalls geht, wenn γ doppeltpunktfrei und nicht geschlossen ist; ansonsten muss man γ zusammensetzen wie in Bemerkung 20.1(d)). Die Gleichung bedeutet, dass von dem Vektorfeld \vec{v} entlang γ nur der Tangentialanteil integriert wird.

Beispiele: (1) Es gilt

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

dh das Kurvenintegral eines Vektorfeldes ändert bei Orientierungsumkehr der Kurve das Vorzeichen (vgl. aber mit 20.1 Bemerkung (c)).

(2) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Skalarfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Das liegt an

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{(\nabla f)(\gamma(t))^T} \dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

und dem Hauptsatz (aus HM I):

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt.$$

(3) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$. Auch hier gilt

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot \vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Ende
Woche 7

20.3 Gebiete und einfach zusammenhängende Mengen

Definition: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für je zwei Punkte $x, y \in K$ gilt: $S[x, y] \subseteq K$ ($S[x, y]$ ist die Verbindungsstrecke von x und y , siehe 19.16).

Beispiele: $K(0, 1)$ ist konvex, $K(0, 1) \setminus \{0\}$ ist nicht konvex.

Definition: Sind $x^0, x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$S[x^0, x^1, \dots, x^m] := S[x^0, x^1] \cup S[x^1, x^2] \cup \dots \cup S[x^{m-1}, x^m]$$

Streckenzug durch x^0, x^1, \dots, x^m .

Ein Streckenzug ist eine Kurve im Sinne von 20.1 Bemerkung (d).

Definition: Eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein *Gebiet*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in G$ einen Streckenzug $S[x^0, x^1, \dots, x^m] \subset G$ gibt mit $x^0 = x$ und $x^m = y$, dh wenn man je zwei Punkte aus G durch einen ganz in G liegenden Streckenzug verbinden kann.

Beispiele: Ist G offen und konvex, so ist G ein Gebiet. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ist kein Gebiet.

Definition: Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es für jeden Streckenzug $S[x^0, x^1, \dots, x^m] \subset G$ mit $x^0 = x^m$ ein $c \in G$ und Kurven $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m : [0, 1] \rightarrow G$ gibt mit $\gamma_j(0) = x^j$, $\gamma_j(1) = c$ und $S[\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t)] \subset G$ für jedes $t \in [0, 1]$.

Dh: Man kann jeden geschlossenen Streckenzug in G zu einem Punkt zusammenziehen, bzw. anschaulich: “ G hat keine Löcher.”

Beispiele: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Konvexe Mengen sind einfach zusammenhängend.

Gibt es in G einen Punkt $c \in G$ mit $S[x, c] \subset G$ für jedes $x \in G$ (solche Gebiete heißen *sternförmig*), so ist G einfach zusammenhängend.

20.4 Kurvenintegrale und Potentialfelder

Satz 1: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

- (i) \vec{v} ist Potentialfeld in G .
- (ii) Für je zwei Punkte $x, y \in G$ ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unabhängig von der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.
- (iii) Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Satz 2: Ist G einfach zusammenhängend und $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, so ist außerdem äquivalent:

(iv) Für alle $j, k = 1, \dots, n$ gilt: $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ auf G (Verträglichkeitsbedingung).

Beispiele: (1) Sei $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+1 \end{pmatrix}$ auf $G := \mathbb{R}^2$. G ist konvex, also einfach zusammenhängend. Hier gilt

$$\partial_y v_1 = \partial_y(2xy) = 2x = \partial_x(x^2 + 1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Nach Satz 2 ist \vec{v} ein Potentialfeld auf \mathbb{R}^2 . Berechnung eines Potentials f wie in Beispiel 19.22(2).

(2) Sei $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist \vec{w} ein C^1 -Vektorfeld, das die Bedingung (iv) erfüllt: Es ist

$$\partial_y w_1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x w_2.$$

Für die Kurve γ aus Beispiel 20.2(3) gilt aber

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Also ist \vec{w} nach Satz 1 kein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

Auf z.B. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (was konvex, also einfach zusammenhängend ist) ist \vec{w} aber ein Potentialfeld und $f(x, y) := \arctan(y/x)$ definiert ein Potential.

20.5 Integration über Teilmengen im \mathbb{R}^2

Sei $R := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Man erklärt Integrierbarkeit und Integral für beschränkte Funktionen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ähnlich wie in 10.1 und 10.2, indem man Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ und die daraus resultierenden Zerlegungen $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$ von R betrachtet. Ist f integrierbar, schreiben wir

$$\iint_R f(x, y) d(x, y)$$

für das Integral.

Satz 1: Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Beispiel:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy \, d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Definition: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f über B integrierbar, falls es ein Rechteck R gibt mit $B \subseteq R$ und die Funktion $f_0 : R \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in B \\ 0 & , (x, y) \notin B \end{cases}$, integrierbar ist. Man setzt

$$\iint_B f(x, y) \, d(x, y) = \iint_R f_0(x, y) \, d(x, y).$$

Satz 2: Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$B := \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

und $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig Funktionen sind, so ist f über B integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht werden, dh für Mengen

$$C = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\},$$

wobei $a, b : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Es ist dann

$$\iint_C f(x, y) \, d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beispiele: (1) Sei $B := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint_B x \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Sei $B := \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint_B d(x, y) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt von B .

Bemerkung: (a) In Satz 2 ist B **abgeschlossen**. Integriert man nur über die **offene** Menge

$$\text{inn}(B) := \{(x, y) : a < x < b, c(x) < y < d(x)\},$$

(das *Innere von B*), so ändert sich das Integral nicht (f ist aber als stetig auf B vorausgesetzt!).

(b) Lässt sich eine abgeschlossene Menge A schreiben als $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, wobei jedes A_j von der Form B oder C ist und $\text{inn}(A_1), \text{inn}(A_2), \dots, \text{inn}(A_n)$ paarweise disjunkt sind, so gilt für stetiges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} f(x, y) d(x, y).$$

(c) Wir werden im folgenden über Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$ integrieren. Die Funktionen f werden stetig sein auf $\overline{G} := G \cup \partial G$, wobei ∂G (der *Rand von G*) die Menge aller *Randpunkte von G* ist, dh die Menge aller $\vec{x} \in G$ mit $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ und $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset$ ("in jeder Umgebung von \vec{x} liegen Punkte aus G und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus G$ ").

Beispiel: Für $G = \text{inn}(B)$ von oben gilt

$$\partial G = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \{c(x), d(x)\}\} \cup \{(a, y) : y \in [c(a), d(a)]\} \cup \{(b, y) : y \in [c(b), d(b)]\}.$$

20.6 Gaußscher Integralsatz im \mathbb{R}^2

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet so, dass sich Bemerkung 20.5(b) auf \overline{G} anwenden lässt. Der Rand ∂G von G bestehe aus endlich vielen regulären Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, dh $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ (im Sinne von Bemerkung 20.1(d)) ist doppelpunktfrei und hat ∂G als Spur. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt". In dieser Situation schreibt man statt \oint_{γ} suggestiv auch $\oint_{\partial G}$.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{G} \subset D$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y).$$

Bemerkung: Manchmal wird auch $\oint_{\partial G} v_1(x, y) dx + v_2(x, y) dy$ statt $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ geschrieben.

Wir betrachten den Fall eines offenen Rechtecks $G = (0, b) \times (0, d)$ und parametrisieren die

vier Seiten jeweils durch die Bogenlänge. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^b v_1(x, 0) dx + \int_0^d v_2(b, y) dy - \int_0^b v_1(x, d) dx - \int_0^d v_2(0, y) dy \\
 &= \int_0^d \underbrace{v_2(b, y) - v_2(0, y)}_{=\int_0^b \partial_1 v_2(x, y) dx} dy - \int_0^b \underbrace{v_1(x, d) - v_1(x, 0)}_{=\int_0^d \partial_2 v_1(x, y) dy} dx \\
 &= \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y).
 \end{aligned}$$

20.7 Stokesscher Integralsatz im \mathbb{R}^2

Seien G , ∂G , D und \vec{v} wie in 20.6. Die rechte Seite im Satz lässt sich schreiben als

$$\iint_G \left(\nabla \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{e}_3 d(x, y).$$

Bemerkung: Hier kann in der dritten Komponente statt 0 auch eine beliebige Funktion $v_3 \in C^1(D, \mathbb{R})$ stehen.

20.8 Divergenzsatz im \mathbb{R}^2

Seien G , ∂G , D wie in 20.6 und sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Der Rand ∂G sei parametrisiert durch $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$, $0 \leq s \leq L$ (dh also bzgl. der Bogenlänge). Dann ist $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ und $\|\vec{T}(s)\| = 1$. Setzt man $\vec{N}(s) := \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$, so ist $\vec{N}(s)$, $\vec{T}(s)$ ein Rechtssystem in \mathbb{R}^2 . Da G "links von γ " liegt, ist $\vec{N}(s)$ senkrecht auf ∂G und nach außen gerichtet (*äußere Einheitsnormale*).

Setzt man $\vec{v} := \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$, so erhält man aus 20.6:

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = \iint_G (\nabla \cdot \vec{w}) d(x, y).$$

Wegen $v_1 = -w_2$ und $v_2 = w_1$ ist nämlich

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot \vec{T} ds = \vec{w} \cdot \vec{N} ds$$

und $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2$.

Bemerkung: In $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds$ wird der Anteil des Vektorfeldes \vec{w} in äußerer Normalenrichtung aufintegriert. Das Integral ist also der *Fluss* des Vektorfeldes durch ∂G (aus G heraus). Die Divergenz $\nabla \cdot \vec{w}$ ist ein Maß für die *Quelldichte* des Vektorfeldes.

Insbesondere gilt: Ist \vec{w} *quellenfrei* in D (dh $\nabla \cdot \vec{w} = 0$ in D), so ist $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 0$ für alle G wie in 20.6 mit $\bar{G} \subset D$ (und umgekehrt).

Ende
Woche 8

Beispiel: Sei $r > 0$ und $G := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Wir parametrisieren $\partial G = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Anhand einer Skizze ist klar, dass $\vec{N}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{N}(x, y) = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \partial G$.

[Parametrisieren wir nach der Bogenlänge, so ist $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$, $s \in [0, 2\pi r]$, und $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/r) \\ \cos(s/r) \end{pmatrix}$, sowie $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} \cos(s/r) \\ \sin(s/r) \end{pmatrix}$].

Das Vektorfeld sei gegeben durch $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y \end{pmatrix}$. Dann gilt $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds &= \iint_G \nabla \cdot \vec{w} d(x, y) = \iint_G (y + 2) d(x, y) \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (y + 2) dy dx = 4 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir substituieren $x = r\xi$, $dx = r d\xi$ und erhalten

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 4r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = 2\pi r^2.$$

20.9 Greensche Formeln

Seien G , ∂G , D wie vorher und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $g \in C^1(D, \mathbb{R})$. Dann gilt die *1. Greensche Formel*:

$$\oint_{\partial G} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} ds = \iint_G \left(g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f \right) d(x, y).$$

Zum Beweis sei $\vec{w} := g \nabla f$ in 20.8. Man beachte $g \nabla f \cdot \vec{N} = g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}$ und

$$\nabla \cdot \vec{w} = \nabla \cdot (g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\nabla \cdot \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\Delta f)$$

(Produktregel aus 19.21).

Sind $f, g \in C^2(D, \mathbb{R})$, so gilt die *2. Greensche Formel*:

$$\oint_{\partial G} \left(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) ds = \iint_G \left(g \Delta f - f \Delta g \right) d(x, y).$$

Zum Beweis subtrahiere von der 1. Greenschen Formel die Formel, in der die Rollen von f und g vertauscht sind.

Beispiel: (1) Seien G , ∂G , D wie in 20.6 und $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$ in G und $u = 0$ auf ∂G . Mit $f = g = u$ in der ersten Greenschen Formel erhält man

$$\iint_G \nabla u \cdot \nabla u \, d(x, y) = 0.$$

Da $\nabla u \cdot \nabla u = \|\nabla u\|^2 \geq 0$ stetig in G ist, folgt $\|\nabla u(x, y)\| = 0$ für alle $(x, y) \in G$ und weiter $\nabla u(x, y) = \vec{0}$ für alle $(x, y) \in G$.

Mit der folgenden Bemerkung erhält man, dass u auf G konstant ist. Da u stetig ist, ist u auch auf \overline{G} konstant. Da nach Voraussetzung aber $u = 0$ auf $\partial G \subset \overline{G}$ ist, folgt $u = 0$ auf \overline{G} .

Bemerkung: Ist G ein Gebiet und $u \in C^1(G, \mathbb{R})$ mit $\nabla u = \vec{0}$ in G , so ist u auf G konstant.

Begründung: Zu je zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in G$ findet man eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\vec{\gamma}(0) = \vec{x}$ und $\vec{\gamma}(1) = \vec{y}$. Nach Beispiel 20.2(2) ist

$$u(\vec{y}) - u(\vec{x}) = u(\vec{\gamma}(1)) - u(\vec{\gamma}(0)) = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{s} = 0.$$

Hat man ein $u \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$ in G und $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ auf ∂G , so folgt genauso, dass u auf \overline{G} konstant ist, aber z.B. $u = 1$ ist auch eine Lösung.

Beispiel: (2) Seien $u, \varphi \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \notin G$. Dann ist auch $\nabla \varphi(x, y) = \vec{0}$ für alle $(x, y) \notin \overline{G}$ somit $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$ auf ∂G . Aus der zweiten Greenschen Formel erhalten wir

$$\iint_G \varphi(\Delta u) \, d(x, y) = \iint_G u(\Delta \varphi) \, d(x, y)$$

(vergleiche partielle Integration).

20.10 Bemerkung: Die Sätze in 20.6–20.8 gelten auch, wenn statt C^1 auf D nur vorausgesetzt wird:

Das Vektorfeld \vec{v} (bzw. \vec{w}) ist auf G stetig differenzierbar und die Komponentenfunktionen sowie ihre partiellen Ableitungen lassen sich stetig auf \overline{G} fortsetzen. Man schreibt dafür: $\vec{v}, \vec{w} \in C^1(\overline{G})$.

Entsprechend wird definiert: $f \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R})$, falls $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ ist und sich f und alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchstens 2 stetig auf \overline{G} fortsetzen lassen.

21 Oberflächenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^3

Wir beschäftigen uns zunächst mit Volumenintegralen im \mathbb{R}^3 bzw. gleich allgemein mit Integralen im \mathbb{R}^n (vgl. mit 20.5).

21.1 Integrale über Teilmengen von \mathbb{R}^n

Sei $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader im \mathbb{R}^n und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Man erklärt *Integrierbarkeit von f* und das *Integral von f über Q* ähnlich wie in 10.1 und 10.2 (HM I). Dabei muss man jedes der Intervalle $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, zerlegen:

$$a_j = z_{j,0} < z_{j,1} < \dots < z_{j,m(j)} = b_j,$$

und Supremum und Infimum von f auf den “kleinen” Quadern

$$\prod_{j=1}^n [z_{j,k(j)-1}, z_{j,k(j)}]$$

betrachten (hierbei ist $k(j) \in \{1, 2, \dots, m(j)\}$ für jedes $j = 1, 2, \dots, n$).

Ist f über Q integrierbar, schreibt man

$$\int_Q f(x_1, x_2, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

für das Integral und im Falle $n = 3$ auch

$$\iiint_Q f(x, y, z) d(x, y, z).$$

Satz: Ist Q wie oben und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über Q integrierbar und

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1,$$

wobei die einzelnen Integrationen rechts in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können.

Bemerkung: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Definition in 20.5 für Integrierbarkeit und Integral beschränkter Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt entsprechend (es ist nur “Rechteck R ” durch “Quader Q ” zu ersetzen; Integrierbarkeit und Integral sind unabhängig von dem Quader Q mit $B \subset Q$).

Der folgende Satz gilt analog auch in höheren Dimensionen.

21.2 Integration über projizierbare Teilmengen von \mathbb{R}^3

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ von der folgenden Form:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

wobei $g, h : B_0 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g \leq h$ und

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

mit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Ist dann $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über B integrierbar und es gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Bemerkung: (a) Die Rollen von x, y, z können vertauscht werden (vergleiche Satz 2 in 20.5).

(b) Für $f = 1$ erhält man das *Volumen* $\text{vol}(B)$ von B .

Beispiele: (1) Sei $r > 0$ und

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

(Kugel um $\vec{0}$ mit Radius r). Mit $a = -r, b = r, u(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, v(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, g(x, y) = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}, h(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ erhalten wir

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}} dz dy dx = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy dx.$$

Wir substituieren im inneren Integral $y = \sqrt{r^2 - x^2}\eta, dy = \sqrt{r^2 - x^2} d\eta$ und erhalten

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy = 2(r^2 - x^2) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} d\eta = \pi(r^2 - x^2).$$

Somit ist

$$\text{vol}(B) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

(2) Sei

$$B := \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Wir berechnen

$$\iiint_B 1 d(x, y, z) = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq z\}} 1 d(x, y) \right) dz.$$

Das innere Integral ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius \sqrt{z} . Dieser Kreis ist der Schnitt durch B mit festgehaltener z -Komponente. Wir erhalten somit

$$\iiint_B 1 \, d(x, y, z) = \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung (Prinzip von Cavalieri): Für $B \subset \mathbb{R}^3$ der Form

$$B = \{(x, y, z) : z \in [a, b], (x, y) \in B(z)\}$$

gilt allgemein

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_a^b \int_{B(z)} d(x, y) \, dz.$$

Hierbei ist $B(z)$ der Schnitt durch B mit festgehaltener z -Komponente.

Bemerkung: Wir werden im folgenden über beschränkte Mengen im \mathbb{R}^3 integrieren, die sich ähnlich wie in Bemerkung 20.5(2) in endlich viele Gebiete der Form B (mit eventuell vertauschten Rollen der Koordinaten) zerlegen lassen. Wir nennen solche Mengen *Integrationsbereiche*.

21.3 Transformationsformel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (meist ist $n = 2$ oder $n = 3$ und B ein Integrationsbereich) und $U \supset B$ ein Gebiet. Sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv mit $\det \Phi' \neq 0$ auf U , sowie $A := \Phi(B)$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Bemerkung: Nach 19.14 ist dann auch $V := \Phi(U)$ offen und $\Phi : U \rightarrow V$ bijektiv und in beiden Richtungen stetig differenzierbar. Da U ein Gebiet und $\det \Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gilt außerdem $\det \Phi' > 0$ auf U oder $\det \Phi' < 0$ auf U .

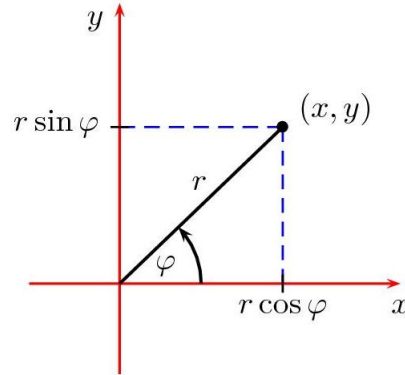
Satz: Es ist f integrierbar über A genau dann, wenn $f \circ \Phi |\det \Phi'(\cdot)|$ über B integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_A f(x) \, dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det(\Phi'(y))| \, dy.$$

Im einfachsten Fall ist $\Phi(x) = Cx + b$, wobei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Nach der "Interpretation" in 15.9 muss das Volumen eines Quaders $Q \subset B$ beim Abbilden mit Φ gerade mit $|\det(C)|$ multipliziert werden. Das ist die Kernidee hinter der Transformationsformel.

21.4 Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann findet man Winkel φ mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.



Für $\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ gilt

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi) = r$.

Damit Φ injektiv ist, nehme man etwa $U = (0, \infty) \times (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ mit $0 \leq \tilde{\varphi}_1 < \tilde{\varphi}_2 \leq 2\pi$ und $\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 < 2\pi$. Sind $\tilde{\varphi}_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \tilde{\varphi}_2$, $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ und $A := \Phi(B)$, so gilt für stetiges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Zusatz: Diese Formel gilt auch für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$, sowie für $R_1 = 0$.

Beispiele: (1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Hier ist $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, also $B = [1, 2] \times [0, \pi]$. Es gilt also für $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} \iint_A y\sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) &= \iint_B r \sin \varphi r dr d\varphi = \int_0^\pi \int_1^2 r^3 \sin \varphi dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_1^2 r^3 dr = 2 \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

(2) Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 - z, z \in [0, 4]\}$ und $A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &= \iiint_M 1 d(x, y, z) = \iint_A \left(\int_0^{4-(x^2+y^2)} 1 dz \right) d(x, y) \\ &= \iint_A 4 - (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\varphi = 8\pi. \end{aligned}$$

(3) Wir berechnen das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (das war in HM I nicht möglich). Dazu sei $R > 0$ und

$$K_R := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0, R] \times [0, R]$$

und $\rho := \sqrt{2}R$, sowie $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$ auf \mathbb{R}^2 .

Dann gilt

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y),$$

$$\iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) = \iint_{Q_R} (e^{-x^2} e^{-y^2}) d(x, y) = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

und genauso

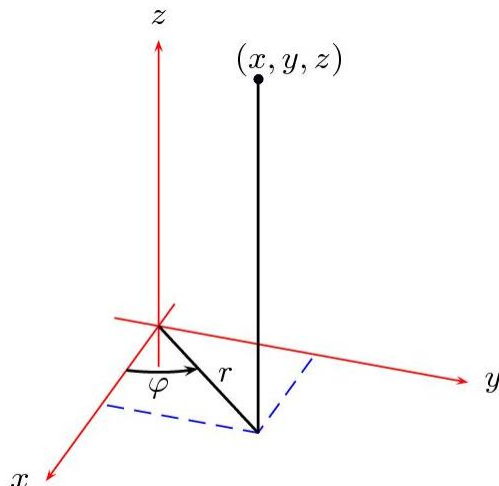
$$\iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-\rho^2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Wir lassen nun $R \rightarrow \infty$ und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

21.5 Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3

Hier ist $\Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und $z = z$.



Es gilt

$$\Phi'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi, z) = r$. Für $A, B \subset \mathbb{R}^3$ wie in 21.3 und stetiges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gilt somit:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Der Zusatz aus 21.4 gilt sinngemäß auch hier.

Beispiel: $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \in [0, 1]\}$, also $B = [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 1]$.
Dann ist für $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$:

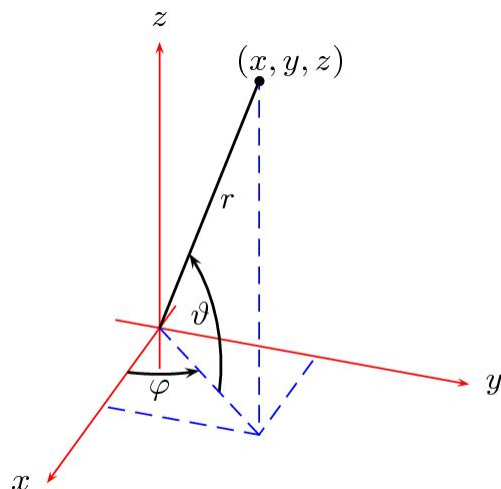
$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + y^2 + yz) d(x, y, z) &= \iiint_B (r^2 + zr \sin \varphi) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (r^2 + zr \sin \varphi) r dz d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \left[zr^3 + \frac{z^2}{2} r^2 \sin \varphi \right]_{z=0}^{z=1} d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^3 + \frac{r^2}{2} \sin \varphi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} r^3 + \frac{r^2}{2} [-\cos \varphi]_0^{\pi/4} dr = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

21.6 Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3

Man schreibt $r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

wobei $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$.



Es ist

$$\Phi'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$.

Sind A und B wie in 21.3, also $A = \Phi(B)$, und ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \varphi, \vartheta).$$

Der Zusatz in 21.4 gilt entsprechend.

Beispiel: Sei $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$. Dann ist $B = [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, und für $f(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \iiint_A x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \iiint_B r \cos \varphi \cos \vartheta \cdot r \cdot r^2 \cos \vartheta d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos \varphi \cos^2 \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^1 r^4 dr \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}_{=1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta d\vartheta}_{=\pi/4} = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

21.7 Flächendarstellungen im \mathbb{R}^3

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Flächen im \mathbb{R}^3 darzustellen.

Explizite Darstellung: $z = f(x, y)$, z.B. $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} : (x, y) \in U \right\},$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Implizite Darstellung: $F(x, y, z) = 0$, z.B. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D : F(x, y, z) = 0 \right\},$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet und $F \in C^1(D, \mathbb{R})$. Hierbei sei $\nabla F(x, y, z) \neq \vec{0}$ für $(x, y, z) \in \mathcal{F}$.

Parameterdarstellung: Beispiel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} : \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2) \right\},$$

allgemein

$$\mathcal{F} = \{\vec{g}(u, v) : (u, v) \in U\},$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet und $\vec{g} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ **injektiv** ist mit $\text{rg } \vec{g}'(u, v) = 2$ für alle $(u, v) \in U$. Ein solches \mathcal{F} heißt *reguläres Flächenstück im \mathbb{R}^3* und \vec{g} heißt *reguläre Parametrisierung* von \mathcal{F} .

Bemerkung: Durch $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ kommt man von einer expliziten zu einer impliziten Darstellung. Die explizite Darstellung ist ein Spezialfall der Parameterdarstellung.

Normaleneinheitsvektor: Ist \mathcal{F} ein reguläres Flächenstück im \mathbb{R}^3 , so gibt es in jedem Punkt auf der Fläche genau zwei Vektoren, die auf der Fläche senkrecht stehen und die Länge 1 haben. Sie sind entgegengesetzt gerichtet und heißen *Normaleneinheitsvektor*. Die Entscheidung für einen der beiden legt die *Orientierung des Flächenstücks* fest.

Häufig wird verlangt, dass \vec{N} "nach außen" zeigt, was aber voraussetzt, dass es überhaupt "innen" und "außen" gibt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall.

Im folgenden betrachten wir \vec{N} als Abbildung $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

In Parameterdarstellung ist

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \pm \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|}, \quad (u, v) \in U.$$

Wir verwenden, wenn nichts anderes gesagt wird, hier das **positive** Vorzeichen.

In impliziter Darstellung $F(x, y, z) = 0$ ist der Normaleneinheitsvektor

$$\vec{N}(x, y, z) = \pm \frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{F}$$

(beachte, dass man statt F ebenso $-F$ verwenden kann). Das liegt daran, dass der Gradient von F senkrecht auf der Niveaufläche steht (vgl. 19.12). (Beachte, dass man statt F ebenso $-F$ verwenden kann.)

Für die explizite Darstellung $z = f(x, y)$ erhalten wir

$$\vec{N}(x, y, f(x, y)) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in U$$

(beachte, dass $\partial_x \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}$ und $\partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}$).

21.8 Oberflächenintegral

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre (insbesondere also injektive) Parametrisierung eines Flächenstücks. Dann heißt

$$do := \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v)$$

skalares Oberflächenelement, und

$$d\vec{o} := \partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) d(u, v)$$

heißt *vektorielles Oberflächenelement* des durch \vec{g} parametrisierten regulären Flächenstücks.

Definition: Sei $B \subset U$ ein Integrationsbereich und $\mathcal{F} := \vec{g}(B)$. Für ein stetiges Skalarfeld $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das (*Oberflächen-*)Integral von f über \mathcal{F} durch

$$\iint_{\mathcal{F}} f do := \iint_B f(\vec{g}(u, v)) \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v),$$

und für ein stetiges Vektorfeld $\vec{w} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ setzt man

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} := \iint_B \vec{w}(\vec{g}(u, v)) \cdot (\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)) d(u, v).$$

Für $f = 1$ erhält man den *Flächeninhalt* von \mathcal{F} :

$$A(\mathcal{F}) := \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_B \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v).$$

Bemerkung: Die Definitionen sind invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Bemerkung: Wenn wir das vektorielle Oberflächenelement mit dem skalaren Oberflächenelement vergleichen und – wie in 21.7 gesagt – für \vec{N} das positive Vorzeichen nehmen, dh

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|},$$

so ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N} \, do,$$

das ist der **Fluss** des Vektorfelds \vec{v} durch die mittels \vec{N} orientierte Fläche \mathcal{F} .

Beispiel: Wir berechnen den Flächeninhalt einer oberen Halbkugel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

mit Radius $R > 0$. Wir haben eine explizite Darstellung mit $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Es ist $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $-\partial_x f = x/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $-\partial_y f = y/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Wir setzen $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Somit ist

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}) &= \iint_B \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} \, d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho \\ &= 2\pi R^2 \left[-\sqrt{1 - \rho^2} \right]_0^1 = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

21.9 Der Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks $\mathcal{F}^* := \vec{g}(U)$.

Sei $G \subset U$ ein Gebiet so, dass \overline{G} ein Integrationsbereich ist. Der Rand ∂G von G bestehe aus endlich vielen regulären Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, dh $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ (im Sinne von

Bemerkung 20.1(d)) ist doppelpunktfrei und hat ∂G als Spur. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt" (dh ∂G ist *positiv orientiert*).

Sei $\mathcal{F} := \vec{g}(G)$. Dann ist $\partial\mathcal{F} := \vec{g}(\partial G)$ parametrisiert durch $\vec{g} \circ \gamma$.

Satz: Ist nun $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\mathcal{F} \subset V$ und $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, so gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}.$$

Nach 20.2 können wir die linke Seite auch schreiben als

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{T} ds,$$

wobei $\vec{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Tangenteneinheitsvektor ist, hier gegeben durch

$$\vec{T}(\vec{g}(\gamma(t))) = \frac{\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{\|\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\|},$$

und die rechte Seite können wir schreiben als

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} do.$$

Ende
Woche 9

Alternativ: Ist \vec{T} auf $\partial\mathcal{F}$ gegeben (und damit die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ festgelegt), so sei im Punkt $P \in \partial\mathcal{F}$ der Vektor \vec{n} der Vektor der Länge 1, der in der Tangentialebene an \mathcal{F} in P senkrecht auf \vec{T} steht und ins Äußere von \mathcal{F} weist. Die Richtung von \vec{N} ist dann diejenige von $\vec{n} \times \vec{T}$.

Anders ausgedrückt: Die Orientierung von \vec{N} auf \mathcal{F} ergibt sich aus der Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ im Sinne der "Rechtsschraubenregel". Man vergleiche hierzu auch die ebene Version des Stokesschen Integralsatzes in 20.7!

Beispiele: (1) Sei $\mathcal{F} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Dann ist $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, 0) :$

$x^2 + y^2 = 1\}$. Orientieren wir $\partial\mathcal{F}$ durch $\vec{T}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir $\vec{N}(x, y, z) =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für $(x, y, z) \in \mathcal{F}$.

Wir wollen

$$J := \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}$$

berechnen, wobei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sei.

Nach dem Stokesschen Satz ist

$$J = \oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\cos t, \sin t, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Für $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + z \\ z - x \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$J = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Hier ist übrigens $\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Sei G ein Integrationsbereich im \mathbb{R}^2 mit einer aus endlich vielen regulären Kurven zusammengesetzten doppelpunktfreien Randkurve. Dann gilt für die Fläche $A(G)$ von G :

$$A(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}.$$

(Man brette G in den \mathbb{R}^3 ein und beachte $\vec{N} = \vec{e}_3$ und $(\nabla \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \vec{e}_3 = 2$.)

(3) Anwendung von (2): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$G = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in (\alpha, \beta), r \in (0, r(t))\}.$$

Dann gilt die Leibnizsche Sektorformel:

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 dt.$$

(Die Integrale über die Strecken $[(0, 0), (r(\alpha) \cos \alpha, r(\alpha) \sin \alpha)]$ und $[(0, 0), (r(\beta) \cos \beta, r(\beta) \sin \beta)]$ verschwinden, das Integral über $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos t \\ r(t) \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [\alpha, \beta]$ rechne man aus.)

(4) Beispiel (2) legt nahe, $A(\mathcal{F})$ auch für gekrümmte Flächen durch

$$A(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

berechnen zu können, wobei \vec{v} ein C^1 -Vektorfeld mit $(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} = 1$ auf \mathcal{F} ist. Dann sollte aber $\nabla \times \vec{v} = \vec{N}$ auf \mathcal{F} sein und somit insbesondere $\nabla \cdot \vec{N} = 0$.

Sei jedoch \mathcal{F} die obere Halbkugel mit Radius 1, dann ist $\nabla \cdot \vec{N} = 3$. Also findet man hier kein geeignetes Vektorfeld \vec{v} !

21.10 Der Divergenzatz im \mathbb{R}^3

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränkter und abgeschlossener Integrationsbereich und $G := B \setminus \partial B$ ein Gebiet mit $\partial G = \partial B$ (dann ist $\bar{G} = B$). Der Rand ∂G lasse sich zerlegen in endlich viele reguläre Flächenstücke. Die Einheitsnormale \vec{N} auf ∂G sei ins Äußere von G gerichtet.

Satz: Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\bar{G} \subset V$ und $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_G \nabla \cdot \vec{v} \, d\tau = \iint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do,$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x, y, z)$ geschrieben haben.

Beispiele: (1) Für $\vec{v} \in C^2(V, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\iint_{\partial G} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} = 0,$$

da ja $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ in G . Nach 21.9 ist das nicht verwunderlich, da die Oberfläche ∂G von G ja *geschlossen* ist und selbst keinen (Flächen-)Rand hat.

(2) Für $f \in C^2(V)$ gilt

$$\iiint_G \Delta f \, d\tau = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot \vec{N} \, do = \iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do.$$

(3) **Greensche Formeln** Für $f, g \in C^2(V, \mathbb{R})$ und $h \in C^1(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G} h \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do &= \iiint_G \left(h \Delta f + \nabla h \cdot \nabla f \right) \, d\tau, \\ \iint_{\partial G} \left(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) \, do &= \iiint_G \left(g \Delta f - f \Delta g \right) \, d\tau. \end{aligned}$$

(4) Setzt man $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$, so gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 3$, und wir erhalten

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{N} \, do.$$

Für $G = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| < R\}$ ist also wegen $\vec{N} = \vec{x}/\|\vec{x}\|$:

$$\text{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \|\vec{x}\| \, d\sigma = \frac{R}{3} \underbrace{A(\partial G)}_{=4\pi R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

(5) Wir setzen $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ und $\vec{v} = \nabla f$. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \cdot (2x_j) \right)_j = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \\ \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}) &= -\sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} - 3\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^5} \right) = 0 \end{aligned}$$

für $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Nach Stokes ist also für G mit $0 \notin \bar{G}$:

$$\iint_{\partial G} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Wir halten außerdem fest, dass

$$\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(6) Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer Kugel G um $\vec{0}$ mit Radius R . Wir wollen

$$\iiint_G \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau = -4\pi \varphi(0)$$

zeigen. Da der Integrand für $\vec{x} \rightarrow 0$ nicht beschränkt bleiben muss, verstehen wir unter der linken Seite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau,$$

wobei $G_\varepsilon := G \setminus \{\|\vec{x}\| \leq \varepsilon\}$. Für festes $\varepsilon \in (0, R)$ ist jetzt nach der zweiten Greenschen Formel und nach (5):

$$\iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau = \int_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, d\sigma - \int_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, d\sigma.$$

Dabei beachte man, dass für $\|\vec{x}\| = \varepsilon$ gilt: $\vec{N} = -\vec{x}/\varepsilon$. Also ist

$$-\int_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, d\sigma = -\varepsilon^{-2} \int_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \, d\sigma \rightarrow -4\pi \varphi(0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Andererseits ist $\|\nabla \varphi\| \leq K$ für eine geeignete Konstante K und daher

$$\left| \int_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, d\sigma \right| \leq \frac{4\pi \varepsilon^2}{\varepsilon} K \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

22 Parameterintegrale

22.1 Stetige Abhängigkeit von einem Parameter

Satz: Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$g(x) := \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Dann ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Für $x, h \in \mathbb{R}$ mit $x, x + h \in [a, b]$ gilt:

$$|g(x + h) - g(x)| \leq \int_a^b |f(x + h, y) - f(x, y)| dy.$$

Da f auf $[a, b] \times [c, d]$ gleichmäßig stetig ist, findet man zu gegebenem ε ein δ so, dass der Integrand $\leq \varepsilon$ ist für $|h| \leq \delta$.

22.2 Differenzierbare Abhängigkeit von einem Parameter

Satz: Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$g(x) := \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Weiter sei f partiell nach x differenzierbar, und $\partial_x f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist g in $[a, b]$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = \int_c^d (\partial_x f)(x, y) dy \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Beweis: Wegen 22.1 reicht es, die Differenzierbarkeit zu zeigen. Für x, h mit $x, x + h \in [a, b]$ und $h \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - \int_c^d (\partial_x f)(x, y) dy \right| \leq \int_c^d \left| \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} - (\partial_x f)(x, y) \right|.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist

$$\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = (\partial_x f)(\xi, y)$$

für ein (von h und y abhängiges) ξ zwischen x und $x + h$. Da $\partial_x f$ auf $[a, b] \times [c, d]$ gleichmäßig stetig ist, kann man wie eben argumentieren.

Beispiele: (1) Sei $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ und $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Dann ist $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^1 \sin(x^2 + y^2) dy$ stetig differenzierbar und

$$g'(x) = \int_0^1 2x \cos(x^2 + y^2) dy, \quad x \in [0, 1].$$

(2) Zusätzlich seien $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar und

$$h(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Dann ist $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$h'(x) = \int_c^d (\partial_x f)(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [a, b].$$

Es ist nämlich $h(x) = F(x, \varphi(x), \psi(x))$ für $F(x, u, v) := \int_u^v f(x, y) dy$. Man verwende die Kettenregel

$$\frac{dh}{dx} = \partial_x F + (\partial_u F) \frac{d\varphi}{dx} + (\partial_v F) \frac{d\psi}{dx}$$

und beachte $\partial_u F = -f(x, u)$, $\partial_v F = f(x, v)$.

22.3 Bemerkung: Die Aussagen der Sätze in 22.1 und 22.2 gelten sinngemäß auch, wenn bzgl. der Variablen y nicht über ein Intervall $[c, d]$, sondern über einen (abgeschlossenen und beschränkten) Integrationsbereich $B \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^3$ oder über ein abgeschlossenes beschränktes Flächenstück integriert wird.

Wir betrachten als Anwendung die folgende Situation.

22.4 Kontinuumsmechanik

Gegeben sei ein Integrationsbereich $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand im Sinne von 21.10. Gegeben sei eine C^2 -Abbildung $\Phi : [0, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, a) \mapsto \Phi(t, a)$, derart, dass $\Phi(t, \cdot) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ für jedes $t \in [0, b]$ injektiv ist und $\det(\partial_a \Phi)(t, a) > 0$ für alle $(t, a) \in [0, b] \times \Omega_0$ gilt (beachte, dass $(\partial_a \Phi)(t, a) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist).

Wir stellen uns Ω_0 als eine Menge von Massepunkten a vor, deren Bewegung durch Φ beschrieben ist. Für einen festen Massepunkt a ist also $t \mapsto \Phi(t, a)$ die Kurve, die dieser im Raum beschreibt. Somit ist $\partial_t \Phi(t, a)$ die Geschwindigkeit des Massepunktes a zur Zeit t . Wir setzen

$$\Omega_t := \{\Phi(t, a) : a \in \Omega_0\}, \quad t \in [0, b].$$

Dann ist $\Phi(t, \cdot) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ für jedes $t \in [0, b]$ bijektiv und in beiden Richtungen stetig differenzierbar. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $\Phi(t)$ und ihre Inverse mit $\Phi(t)^{-1}$:

$\Omega_t \rightarrow \Omega_0$. Verwendet man die Zeit t und den Massepunkt (das Teilchen) a zur Beschreibung, so spricht man von *Lagrange-Koordinaten*.

Betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld als Funktion von Zeit t und Ort x (man spricht von *Euler-Koordinaten*), so erhalten wir

$$\vec{u}(t, x) = (\partial_t \Phi)(t, a) \Big|_{a=\Phi(t)^{-1}(x)}, \quad t \in [0, b], x \in \Omega_t.$$

22.5 Das Transporttheorem

Satz: Sei $(x, t) \mapsto h(x, t)$ ein C^1 -Skalarfeld, definiert für $t \in [0, b]$, $x \in \Omega_t$. Sei $V_0 = V(0) \subset \Omega_0$ ein Integrationsbereich und

$$V(t) := \Phi(t)(V_0) = \{\Phi(t, a) : a \in V_0\}, \quad t \in [0, b],$$

sowie

$$g(t) := \iiint_{V(t)} h(x, t) dx, \quad t \in [0, b].$$

Dann ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} g(t) = \iiint_{V(t)} (\partial_t h + \nabla_x \cdot (h\vec{u})) (t, x) dx, \quad t \in [0, b].$$

Bemerkung: Das Skalarfeld beschreibt in der Regel eine physikalische Größe. Ist z.B. $h = \rho$ die Massendichte, so beschreibt $g(t)$ die zeitliche Entwicklung der Masse eines Volumenbereichs $V(0)$. Massenerhaltung bedeutet, dass g konstant ist oder dass

$$0 = \iiint_{V(t)} (\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho\vec{u})) (t, x) dx, \quad t \in [0, b].$$

Da $V(0)$ hier beliebig ist, erhalten wir

$$0 = \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho\vec{u}).$$

Ist die Massendichte ρ konstant, ergibt sich

$$\nabla_x \cdot u(t, x) = 0, \quad \text{für alle } x, t,$$

und das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} ist quellenfrei.

Herleitung des Transporttheorems: In der Definition von $g(t)$ substituieren wir nach 21.3 $x = \Phi(t, a)$, $dx = \det(\partial_a \Phi(t, a)) da$, so dass

$$g(t) = \iiint_{V_0} h(t, \Phi(t, a)) \det(\partial_a \Phi(t, a)) da, \quad t \in [0, b].$$

Wir leiten nach t ab, was nach 22.2 bedeutet, dass wir den Integranden partiell nach t ableiten müssen. Dabei verwenden wir die Produktregel. Nach der Kettenregel ist

$$\partial_t(h(t, \Phi(t, a))) = (\partial_t h)(t, \Phi(t, a)) + (\nabla_x h)(t, \Phi(t, a)) \cdot (\partial_t \Phi)(t, a).$$

Somit haben wir (nach Rücktransformation für den ersten Term):

$$\frac{d}{dt}g(t) = \iiint_{V_0} (\partial_t h + \nabla_x h \cdot \vec{u})(t, x) dx + \underbrace{\iiint_{V_0} h(t, \Phi(t, a)) \partial_t (\det (\partial_a \Phi(t, a))) da}_{=I}.$$

Wir benötigen nun die Ableitung $D\det$ von \det als skalare Funktion auf den invertierbaren $n \times n$ -Matrizen. Nach der Kettenregel ist dann nämlich

$$\partial_t (\det (\partial_a \Phi(t, a))) = (D\det)(\partial_a \Phi(t, a)) \partial_t \partial_a \Phi(t, a)$$

und wir können das Integral I zurücktransformieren.

22.6 Die Ableitung von \det

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$(D\det)(A)B = (\det A) \text{Spur}(BA^{-1}).$$

Herleitung: Wir wissen, dass \det differenzierbar ist. Die linke Seite ist die Richtungsableitung von \det im Punkt A in Richtung B , also

$$(D\det)(A)B = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\det(A + rB) - \det(A)}{r}.$$

Wir verwenden die Leibnizformel und haben für $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\det(A + rB) - \det(A)}{r} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \left(\prod_{j=1}^n (a_{\sigma(j)j} + rb_{\sigma(j)j}) - \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \right) \frac{1}{r} \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \sum_{k=1}^n b_{\sigma(k)k} \prod_{j \neq k} a_{\sigma(j)j} + O(r). \end{aligned}$$

Somit ist

$$(D\det)(A)B = \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma b_{\sigma(k)k} \prod_{j \neq k} a_{\sigma(j)j}.$$

Rechts wird die Determinante der Matrix, die aus A durch Ersetzen der k -ten Spalte durch die k -te Spalte b_k von B entsteht, über k summiert. Nach der Cramerschen Regel ist das

$\det(A)$ mal das Element, das bei $A^{-1}b_k$ an der k -ten Stelle steht. Da $A^{-1}b_k$ die k -te Spalte von $A^{-1}B$ ist, erhalten wir

$$(D\det)(A)B = (\det A)\text{Spur}(A^{-1}B) = (\det A)\text{Spur}(BA^{-1}).$$

22.7 Fortsetzung von 22.5

Wir wenden 22.6 an auf

$$A = \partial_a \Phi(t, a) \quad \text{und} \quad B = \partial_t \partial_a \Phi(t, a) = \partial_a \partial_t \Phi(t, a)$$

und schreiben I als

$$\iiint_{V_0} h(t, \Phi(t, a)) \text{Spur} \left(\partial_a \partial_t \Phi(t, a) (\partial_a \Phi(t, a))^{-1} \right) \det(\partial_a \Phi(t, a)) da.$$

Wir führen die Rücksubstitution $a = \Phi(t)^{-1}(x)$, $da = \det(\partial_x(\Phi(t)^{-1})(x)) dx$ durch und beachten

$$\det(\partial_x(\Phi(t)^{-1})(x)) = \left(\det(\partial_a \Phi(t, a)) \right)^{-1}$$

(Regel für \det und Umkehrsatz!). Damit ist

$$I = \iiint_{V(t)} h(t, x) \text{Spur} \left(\partial_a \partial_t \Phi(t, a) (\partial_a \Phi(t, a))^{-1} \right) \Big|_{a=\Phi(t)^{-1}(x)} dx.$$

Wegen $\vec{u}(t, \cdot) = (\partial_t \Phi)(t, \cdot) \circ \Phi(t)^{-1}$ ist

$$\partial_x \vec{u}(t, \cdot) = \left((\partial_a \partial_t \Phi)(t, \cdot) \circ \Phi(t)^{-1} \right) \underbrace{\partial_x(\Phi(t)^{-1})}_{=(\partial_a \Phi(t))^{-1} \circ \Phi(t)^{-1}},$$

und wir erhalten

$$I = \iiint_{V(t)} h(t, x) \underbrace{\text{Spur} \partial_x \vec{u}(t, x)}_{=\nabla_x \cdot \vec{u}(t, x)} dx.$$

Damit ist das Transporttheorem hergeleitet (Produktregel für die Divergenz).

22.8 Eine weitere Anwendung: Impulserhaltung

Wir betrachten wie in der Bemerkung in 22.5 einen Integrationsbereich V_0 mit "vernünftigem" Rand und seine Entwicklung in der Zeit $V(t)$, $t \in [0, b]$. Ist $\rho(t, x)$ wieder die Massendichte, so ist der Impuls $\vec{c}(t) = (v_j(t))_{j=1}^3$ des Bereiches gegeben durch

$$v_j(t) = \iiint_{V(t)} \rho(t, x) u_j(t, x) d^3x, \quad t \in [0, b], j = 1, 2, 3,$$

wobei $u_j(t, x)$ die j -te Komponente des Geschwindigkeitsfeldes bezeichnet. Nach dem Transporttheorem 22.5 ist also

$$\frac{d}{dt}v_j(t) = \iiint_{V(t)} \left(\partial_t(\rho u_j) + \nabla_x \cdot (h\vec{u}) \right)(t, x) d^3x, \quad j = 1, 2, 3.$$

Bekanntlich ist die Impulsänderung zur Zeit t gerade die Summe der Kräfte, die auf $V(t)$ einwirken. Wir betrachten hier nur *Oberflächenkräfte*, dh

$$\left(\iint_{\partial V(t)} \vec{\sigma}_j(t, x) \cdot d\vec{\sigma} \right)_{j=1}^3,$$

wobei $\vec{\sigma}_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2, 3$, die Zeilen des *Spannungstensors* $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ seien. Wir schreiben dieses Integral nach dem Divergenzsatz als Volumenintegral und erhalten

$$\frac{d}{dt}v_j(t) = \iiint_{V(t)} \nabla_x \cdot \vec{\sigma}_j(t, x) d^3x.$$

Im einfachsten Fall (keine Reibung) ist der Spannungstensor gegeben durch $\sigma(t, x) = -p(t, x)I_3$, wobei $p(t, x) \in \mathbb{R}$ den Druck zur Zeit t am Ort x bezeichnet. Es ist dann $\nabla_x \cdot \vec{\sigma}_j = \partial_j p$, $j = 1, 2, 3$, und wir erhalten somit

$$\iiint_{V(t)} \left(\partial_t(\rho u_j) + \nabla_x \cdot (\rho u_j \vec{u}) + \partial_j p \right)(t, x) d^3x = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Da wieder V_0 bzw. $V(t)$ beliebig waren, ist also

$$\partial_t(\rho u_j) + \nabla_x \cdot (\rho u_j \vec{u}) + \partial_j p = 0, \quad \text{für alle } t, x, j.$$

Wir nehmen nun wieder an, dass die Dichte $\rho = \rho_0$ konstant ist. Außerdem beachten wir, dass wegen der Massenerhaltung (siehe 22.5) dann $\nabla_x \cdot \vec{u} = 0$ ist und somit gilt

$$\nabla_x \cdot (u_j \vec{u}) = \sum_{k=1}^3 \partial_k (u_j u_k) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^3 u_k \partial_k \right)}_{=:\vec{u} \cdot \nabla_x} u_j.$$

In Vektorschreibweise haben wir somit aus Massen- und Impulserhaltung mithilfe des Transporttheorems die *Eulergleichungen*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla_x) \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p & = 0 \\ \nabla_x \cdot \vec{u} & = 0 \end{cases}$$

für eine reibungsfreie Strömung hergeleitet.

Berücksichtigt man im Spannungstensor auch Viskosität, so gelangt man zu den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Ende
Woche 10

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Sommersemester 2009

Es gibt eine ganze Reihe von Integraltransformationen. Wir werden davon die Laplacetransformation und die Fouriertransformation behandeln und stellen das Prinzip kurz anhand der Laplacetransformation vor. Dabei werden Funktionen $f(t)$ eines reellen Parameters $t \geq 0$ transformiert, und man erhält Funktionen $F(s)$ eines komplexen Parameters s mittels

$$F(s) = \int_0^{\infty} k(s, t) f(t) dt,$$

wobei $k(s, t)$ eine **feste** Funktion der beiden Parameter s und t ist (im Falle der Laplacetransformation ist $k(s, t) = e^{-st}$).

Motivation: Gewisse Operationen für Funktionen $f(t)$ lassen sich leichter für die *Transformierten* $F(s)$ durchführen: *analytische* Operationen wie Differentiation oder Integration werden zu *algebraischen* Operationen wie Multiplikation und Division.

Im Falle der Laplacetransformation sind die Funktionen $F(s)$ außerdem *holomorph* und man kann die mächtigen Werkzeuge der *komplexen Analysis* (oder *Funktionentheorie*) verwenden.

Die Laplacetransformation wird vor allem bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und allgemeiner zur Analyse, Synthese und Steuerung von linearen zeitinvarianten Systemen verwendet.

23 Laplacetransformation

Wir betrachten sogenannte “Zeitfunktionen” $t \mapsto f(t)$, wobei wir uns für $t \geq 0$ interessieren (t ist der Zeitparameter). Diese Funktionen nehmen komplexe Werte an, dh konkret

- $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, aber der Verlauf von f für $t < 0$ **wird ignoriert.**

Die ersten beiden Interpretationen herrschen vor, und eine auf $[0, \infty)$ definierte Funktion f denkt man sich gegebenenfalls durch Null auf $(-\infty, 0)$ fortgesetzt.

23.1 Definition: Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf **jedem** Intervall $[0, b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar ist. Ist $s \in \mathbb{C}$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{1}$$

so heißt $\mathcal{L}f(s)$ die *Laplace transformierte von f an der Stelle s* .

Die Menge aller $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral in (1) konvergiert, bezeichnen wir mit $\Lambda(f)$.

Erinnerung: Das uneigentliche Integral ist erklärt durch

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt,$$

wobei die Integrale über $[0, b]$ nach Voraussetzung existieren.

Bezeichnungen sind auch: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $\mathcal{L}\{f\}(s)$, $\mathcal{L}[f](s)$.

23.2 Beispiele: Wir erinnern zunächst daran, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{zt} dt = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z}. \quad (2)$$

Weiter gilt für $b \rightarrow \infty$: $|e^{-sb}| = e^{-b \operatorname{Re} s} \rightarrow 0$, wenn $\operatorname{Re} s > 0$ (abklingende Schwingung), und $\rightarrow \infty$, wenn $\operatorname{Re} s < 0$. Für $s \neq 0$ mit $\operatorname{Re} s = 0$ existiert der Limes $e^{ib \operatorname{Im} s}$ für $b \rightarrow \infty$ nicht (periodische Schwingung).

(a) *Einheitssprung* $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (Bezeichnungen auch $U(t)$, $1(t)$) oder *Heavisidefunktion* (als solche manchmal $H(t)$ oder $I(t)$ geschrieben). Für $s \in \mathbb{C}$ und $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st} \sigma(t) dt = \int_0^b e^{-st} dt = \begin{cases} b, & s = 0 \\ \frac{1 - e^{-sb}}{s}, & s \neq 0 \end{cases}.$$

Wir erhalten $\mathcal{L}\sigma(s) = \frac{1}{s}$ für $\operatorname{Re} s > 0$, sonst keine Konvergenz des Laplaceintegrals.

(b) $f(t) = e^{at}$, wobei $a \in \mathbb{C}$. Ein Vergleich mit (a) ergibt:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a},$$

für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, sonst keine Konvergenz des Integrals in (1).

(c) Sei $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$. Für $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} dt = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), & s \neq 0 \end{cases}.$$

Hier ist also $\Lambda(f) = \mathbb{C}$. Beachte, dass gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = 1 = \mathcal{L}\{f\}(0)$$

(man verwende z.B. $e^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!}$ oder die Abschätzung aus HM I 7.11(11): $|\frac{1-e^{-s}}{s} - 1| \leq |s|e^{|s|}$).

23.3 Definition: Eine Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

(a) *stückweise stetig*, falls es eine Folge

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

so gibt, dass für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_{j+}) = \lim_{t \rightarrow t_{j+}} f(t)$ und $f(t_{j-}) = \lim_{t \rightarrow t_{j+}^-} f(t)$ existieren.

(b) *von exponentieller Ordnung* $\gamma \in \mathbb{R}$, falls es $M > 0$ gibt mit

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und *exponentiell beschränkt*, falls f von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig.

Ist f stückweise stetig und (t_j) eine Folge wie in der Definition, so kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \dots dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig wäre.

23.4 Satz: Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann gilt $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\} \subset \Lambda(f)$ und

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Beweis: Die Voraussetzungen von Definition 23.1 sind erfüllt. Für $b > 0$ und $\operatorname{Re} s > \gamma$ gilt

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^b e^{-(\operatorname{Re} s)t} M e^{\gamma t} dt = M \int_0^b e^{-(\operatorname{Re} s - \gamma)t} dt \longrightarrow \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma} \quad (b \rightarrow \infty).$$

Also konvergiert das Integral in (1) absolut und die Behauptung folgt.

Dabei heißt für eine Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ das Integral $\int_0^\infty g(t) dt$ *absolut konvergent*, falls das Integral $\int_0^\infty |g(t)| dt$ konvergiert. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz des Integrals und die Abschätzung

$$\left| \int_0^\infty g(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt.$$

Bemerkung: Die Funktion $f(t) = Me^{\gamma t}$ zeigt, dass die Aussagen in Satz 23.4 “optimal” sind: nach Beispiel 23.2 gilt $\Lambda(f) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\}$ und

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| = \left| \frac{M}{s - \gamma} \right| = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma}$$

für reelle $s > \gamma$.

23.5 Rechenregeln: Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ_f bzw. γ_g .

(a) (**Linearität**) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\max(\gamma_f, \gamma_g)$ und es gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \max(\gamma_f, \gamma_g).$$

(b) (**Dämpfungsregel**) Ist $a \in \mathbb{C}$, so ist $t \mapsto e^{at} f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma_f + \operatorname{Re} a$ und für $\operatorname{Re} s > \gamma_f + \operatorname{Re} a$ gilt

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a).$$

(c) (**Verschiebungsregel**) Ist $a > 0$, so setzen wir

$$\tau_a f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \tau_a f(t) := \begin{cases} f(t - a) & , t \geq a \\ 0 & , t \in [0, a). \end{cases}$$

(Wir schreiben manchmal auch $\sigma(t - a)f(t - a)$ statt $\tau_a f$ und denken uns die Funktion f durch Null “nach links” fortgesetzt.) Dann ist $\tau_a f$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ_f und

$$\mathcal{L}\{\tau_a f\}(s) = e^{-as} \mathcal{L}\{f\}(s) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma_f.$$

Beweis: (a) klar.

(b) Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^b e^{-(s-a)t} f(t) dt,$$

dann $b \rightarrow \infty$.

(c) Für $b > a$ liefert die Substitution $t = \tau + a$

$$\int_0^b e^{-st} \tau_a f(t) dt = \int_a^b e^{-st} f(t - a) dt = \int_0^{b-a} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} \int_0^{b-a} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau,$$

nun $b \rightarrow \infty$.

23.6 Beispiele: (a) $\sin t$ ist beschränkt auf $[0, \infty)$, dh von exponentieller Ordnung 0. Es gilt $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$. Also nach 23.2(b)

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}\{e^{it}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-it}\}(s)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i} - \frac{1}{s + i} \right) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

für $\operatorname{Re} s > 0$.

(b) Auch $\cos t$ ist von exponentieller Ordnung 0. Für $\operatorname{Re} s > 0$ und $b > 0$ gilt (partielle Integration!)

$$\int_0^b e^{-st} \cos t \, dt = e^{-st} \sin t \Big|_{t=0}^{t=b} + s \int_0^b e^{-st} \sin t \, dt = e^{-sb} \sin b + s \int_0^b e^{-st} \sin t \, dt.$$

Wegen $e^{-sb} \sin b \rightarrow 0$ für $b \rightarrow \infty$ folgt

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0.$$

(c) Seien $P(s), Q(s)$ komplexe Polynome in s mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s) = n$ und

$$Q(s) = (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *verschieden* sind. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n}.$$

(Begründung: Die Abbildung φ die $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ auf die rechte Seite abbildet, ist linear und injektiv, aus Dimensionsgründen also surjektiv auf

$$\{P(s)/Q(s) : \operatorname{Grad} P(s) < n\}.$$

Es ist hier $\alpha_k = \lim_{s \rightarrow \lambda_k} (s - \lambda_k) \frac{P(s)}{Q(s)}$ für $k = 1, \dots, n$.)

Nach 23.2(b) ist also

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathcal{L}\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\}(s)$$

für $\operatorname{Re} s > \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n)$.

(d) $\frac{s+b}{s^2+ps+q}$ mit $b, p, q \in \mathbb{R}$, wobei $s^2 + ps + q$ keine reellen Nullstellen habe. Dann ist $s^2 + ps + q = (s - a)^2 + \omega^2$ mit $a = -p/2$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Im Fall $\omega = 1$ erhalten wir, für $\operatorname{Re} s > a$,

$$\begin{aligned} \frac{s+b}{(s-a)^2+1} &= \frac{s-a}{(s-a)^2+1} + \frac{a+b}{(s-a)^2+1} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t\}(s-a) + (a+b)\mathcal{L}\{\sin t\}(s-a) \\ &= \mathcal{L}\{e^{at} \cos t + (a+b)e^{at} \sin t\}(s) \end{aligned}$$

nach (a), (b) und der Verschiebungsregel.

23.7 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung komplexwertig

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, sowie $y_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die eindeutige Lösung (dh $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar) von

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + f(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

gegeben durch

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Man kann hier übrigens Beispiel 22.2(2) verwenden.

Ist f nur stückweise stetig und $(t_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge wie in Definition 23.3, so ist y stetig auf $[0, \infty)$ und stetig differenzierbar in $M := [0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\begin{aligned} y'(t) &= ay(t) + f(t), & t \in M, \\ y'(t_j \pm) &= ay(t_j) + f(t_j \pm), & j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Man vergleiche mit 17.11.

23.8 Die Faltung

Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt. Für jedes $t \geq 0$ ist

$$\tau \mapsto \begin{cases} f(\tau)g(t-\tau) & , \tau \in [0, t] \\ 0 & , \tau > t \end{cases}$$

über $[0, t]$ Riemann-integrierbar. Die Funktion

$$h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, h(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

ist (stückweise) stetig und exponentiell beschränkt und heißt *Faltung* von f und g , geschrieben $h = f * g$.

Bemerkung: (a) Es gilt $f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = g * f(t)$.

(b) Es gilt

$$(\alpha f_1 + f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + f_2 * g, \quad f * (\beta g_1 + g_2) = \beta(f * g_1) + f * g_2$$

und $(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2)$.

(c) Setzen wir in der Situation von 23.7: $g(t) := e^{at}$, so schreibt sich (4) als

$$y(t) = e^{at}y_0 + (g * f)(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

(d) Es gilt $\sigma * f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, dh $\sigma * f$ ist Stammfunktion von f , die in 0 verschwindet.

Beweis von 23.8: Nur exponentielle Beschränktheit: Es gelte $|f(t)|, |g(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann ist

$$|h(t)| \leq \int_0^t Me^{\gamma\tau} Me^{\gamma(t-\tau)} d\tau = M^2 te^{\gamma t} \leq M^2 M_\varepsilon e^{(\gamma+\varepsilon)t}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

23.9 Die Faltungsregel: Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Anwendung: In der Situation von 23.7 wenden wir die Laplacetransformation an auf (5) und erhalten (wenn f exponentiell beschränkt und $\operatorname{Re} s$ hinreichend groß ist):

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{at}y_0\}(s) + \mathcal{L}\{e^{at}\}(s)\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-a}y_0 + \frac{1}{s-a}\mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Damit ergibt sich als ‘‘Lösungsmethode’’ für (3):

- (i) Bestimme zu $f(t)$ die Laplacetransformation $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) =: F(s)$.
- (ii) Setze $G(s) := \frac{y_0}{s-a} + \frac{F(s)}{s-a}$.
- (iii) Bestimme $y(t)$ so, dass $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = G(s)$.

Dann erwarten wir, dass y Lösung von (3) ist.

Problem: Ist die Funktion $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\rightarrow \mathbb{C}$) in (iii) eindeutig bestimmt?

[I.a. nicht: Für $\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t) & , t \neq 1 \\ c & , t = 1 \end{cases}$ und $c \neq y(1)$ gilt $\mathcal{L}\{\tilde{y}\} = \mathcal{L}\{y\}$.

Aber: Sind y_1, y_2 stetig und $\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\tilde{y}\}$, so folgt $y_1 = y_2$.]

Beweis von 23.9: Nur im Falle $|f(t)| \leq 1, |g(t)| \leq 1, t \geq 0$. Für $b > 0$ und $\operatorname{Re} s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau dt &= \int_0^b \int_0^t e^{-s\tau} f(\tau)e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_\tau^b e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^{b-\tau} e^{-sr} g(r) dr d\tau \\ &= \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^b e^{-sr} g(r) dr - \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_{b-\tau}^b e^{-sr} g(r) dr d\tau. \end{aligned}$$

Für $b \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Term gegen $\mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s)$, den zweiten bezeichnen wir mit $R(b)$.

Wir schreiben $\xi = \operatorname{Re} s$. Dann ist $\xi > 0$ und (nach den Voraussetzungen an f, g):

$$\begin{aligned} |R(b)| &\leq \int_0^b e^{-\xi\tau} |f(\tau)| \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r} |g(r)| dr d\tau \\ &\leq \int_0^b e^{-\xi\tau} \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r} dr d\tau \\ &\leq \int_0^b e^{-\xi\tau} \tau e^{-\xi(b-\tau)} d\tau \\ &= \frac{b^2}{2} e^{-\xi b} \longrightarrow 0 \quad (b \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

23.10 Beispiele: Für $t \geq 0$ gilt

$$\sigma * \sigma(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\sigma(t-\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t.$$

Also ist nach Faltungs- und Dämpfungsregel (hier ist $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sigma\}(s)\mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ \mathcal{L}\{te^{at}\}(s) &= \mathcal{L}\{t\}(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$(\sigma * \sigma) * \sigma(t) = \int_0^t \tau\sigma(t-\tau) d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0.$$

Also (wieder mit $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}(s) &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ \mathcal{L}\{t^2 e^{at}\}(s) &= \frac{2}{(s-a)^3}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \end{aligned}$$

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt (Beweis durch Induktion!):

$$\begin{aligned} \underbrace{\sigma * \sigma * \dots * \sigma}_{n+1}(t) &= \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0. \\ \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}(s) &= \frac{1}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ \mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \end{aligned}$$

23.11 Komplexe Partialbruchzerlegung

Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome mit $\text{Grad } P(s) < \text{Grad } Q(s) = n$. Dann existieren verschiedene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ und

$$Q(s) = \mu(s - \lambda_1)^{k_1} \cdot (s - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (s - \lambda_m)^{k_m},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C}$. [Die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sind die *verschiedenen* komplexen Nullstellen von $Q(s)$ und k_1, k_2, \dots, k_m deren jeweilige Vielfachheiten.] Es gibt dann komplexe Koeffizienten $\alpha_l^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$) so, dass

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(s - \lambda_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(2)}}{s - \lambda_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(s - \lambda_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(s - \lambda_2)^{k_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(m)}}{s - \lambda_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(s - \lambda_m)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(s - \lambda_m)^{k_m}}. \end{aligned}$$

M.a.W. $\frac{P(s)}{Q(s)}$ ist eine Linearkombination der Funktionen $\frac{1}{(s - \lambda_j)^l}$ ($j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$). Für die Koeffizienten höchster Ordnung hat man etwa

$$\alpha_{k_j}^{(j)} = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} (s - \lambda_j)^{k_j} \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Wir erhalten aus 23.10:

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \mathcal{L} \left\{ \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \alpha_2^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_{k_1}^{(1)} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{\lambda_1 t} + \right. \\ &+ \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \alpha_2^{(2)} t e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_{k_2}^{(2)} \frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} e^{\lambda_2 t} + \\ &+ \dots + \\ &\left. + \alpha_1^{(m)} e^{\lambda_m t} + \alpha_2^{(m)} t e^{\lambda_m t} + \dots + \alpha_{k_m}^{(m)} \frac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!} e^{\lambda_m t} \right\} (s) \end{aligned}$$

für $\text{Re } s > \max\{\text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2, \dots, \text{Re } \lambda_m\}$.

Beispiel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s - i} - \frac{1}{2} \frac{1}{s + i},$$

hier sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Wir lesen ab

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathcal{L} \left\{ \sigma(t) - \frac{1}{2} e^{it} - \frac{1}{2} e^{-it} \right\} (s) = \mathcal{L} \{ \sigma(t) - \cos t \} (s).$$

23.12 Differentiation für stetige stückweise differenzierbare Funktionen

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und von exponentieller Ordnung γ und sei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow \infty$ eine Folge derart, dass f in $[0, \infty) \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ differenzierbar ist und f' stückweise stetig ist im folgenden Sinne:

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- (i) $f' : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig,
- (ii) die einseitigen Grenzwerte $f'(t_{j+}) = \lim_{t \rightarrow t_{j+}} f'(t)$ und $f'(t_{j+1}-) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}-} f'(t)$ existieren.

In den Punkten t_j selber ist f' nicht unbedingt definiert, in diesem Fall setzen wir $f'(t) := (f'(t_{j+}) + f'(t_{j-}))/2$. Der Funktionswert spielt aber für die Integration keine Rolle.

Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0), \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Ende
Woche 11

Bemerkung: Unter den gegebenen Voraussetzungen kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \dots dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig differenzierbar wäre.

Beweis: Für $b > 0$ und $\operatorname{Re} s > \gamma$ gilt mittels partieller Integration

$$\int_0^b e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^b + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt = e^{-sb} f(b) - f(0) + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

[Dabei beachte man, dass etwa für $t_1 < b < t_2$ die Funktion f betrachtet auf $[0, t_1]$ und auf $[t_1, b]$ stetig differenzierbar ist und man partielle Integration auf jedes dieser Teilintervalle anwendet, wobei am Rand die einseitigen Grenzwerte zu nehmen sind. Man hat dann

$$e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{t_1-} + e^{-st} f(t) \Big|_{t=t_1+}^b = e^{-st_1} f(t_1-) - f(0) + e^{-sb} f(b) - e^{-st_1} f(t_1+) = e^{-sb} f(b) - f(0)$$

wegen der Stetigkeit von f in t_1]. Die Behauptung folgt mit $b \rightarrow \infty$.

Bemerkung: Betrachtet man nicht $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, sondern $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, so betrachtet man die Ableitung $f'(t)$ nur für $t > 0$ und hat in der Formel den rechtsseitigen Grenzwert $f(0+)$ zu nehmen:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0+).$$

Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0, 1] \\ 2 - t & , t \in (1, 2] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Hier gilt $f'(t) = 1$ für $t \in (0, 1)$, $f'(t) = -1$ für $t \in (1, 2)$ und $f'(t) = 0$ für $t > 2$. Setzt man $g(t) = 1$ für $t \in (0, 1)$ und $g(t) = 0$ sonst, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g\}(s) &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \\ \mathcal{L}\{f\}(s) &= \mathcal{L}\{g * g\}(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2 \\ \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \mathcal{L}\{g - \tau_1 g\}(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} - e^{-s} \frac{1 - e^{-s}}{s} = s \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2 = s \mathcal{L}\{f\}(s)\end{aligned}$$

für $\operatorname{Re} s > 0$.

23.13 Folgerung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar und derart, dass $f^{(n-1)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ die Voraussetzungen von 23.12 erfüllt. Dann gilt für $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ (im Sinne von 23.12):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - f^{(n-1)}(0+) - s f^{(n-2)}(0+) - \dots - s^{n-2} f'(0+) - s^{n-1} f(0+)$$

für $\operatorname{Re} s > \max(\gamma, 0)$.

23.14 Anwendung

Wir können die Regeln aus 23.12 und 23.13 zur Lösung von Anfangswertproblemen für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (vgl. 17.6–17.8) verwenden.

Vorbemerkung (reelle Partialbruchzerlegung): Sind $P(s)$, $Q(s)$ reelle Polynome mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s)$, so treten nicht-reelle Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf und können zusammengefasst werden:

$$\frac{\alpha}{s - a + i\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s - a - i\omega} = \frac{2(\operatorname{Re} \alpha)(s - a) + 2\omega \operatorname{Im} \alpha}{(s - a)^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{2(\operatorname{Re} \alpha)e^{at} \cos(\omega t) + 2(\operatorname{Im} \alpha)e^{at} \sin(\omega t)\}(s)$$

und

$$\frac{\beta}{(s - a + i\omega)^2} + \frac{\bar{\beta}}{(s - a - i\omega)^2} = \frac{2(\operatorname{Re} \beta)(s - a)^2 + 4\omega(\operatorname{Im} \beta)(s - a) - 2(\operatorname{Re} \beta)\omega^2}{((s - a)^2 + \omega^2)^2}.$$

Hierbei sind a, ω reell und α, β komplex. Mittels der Formeln $\sin(\omega t) = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$, $\cos(\omega t) = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$ sieht man ein, dass

$$\mathcal{L}\{t \cos(\omega t)\}(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \mathcal{L}\{t \sin(\omega t)\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

für $\operatorname{Re} s > 0$. Also ist

$$\frac{\beta}{(s - a + i\omega)^2} + \frac{\bar{\beta}}{(s - a - i\omega)^2} = \mathcal{L}\{2(\operatorname{Re} \beta)te^{at} \cos(\omega t) + 2(\operatorname{Im} \beta)te^{at} \sin(\omega t)\}(s).$$

(a) **RL-Kreis:** In einem Stromkreis mit Widerstand R und einer Spule der Induktivität L gilt, wenn wir die Spannung U anlegen, für den Strom J :

$$J' = -\frac{R}{L}J + \frac{U}{L}.$$

Nehmen wir speziell $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und $J(0) = 0$, so erhalten wir nach Laplacetransformation:

$$s\mathcal{L}\{J\}(s) = -\frac{R}{L}\mathcal{L}\{J\}(s) + \frac{U_0}{L} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

also

$$\mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{U_0}{L} \frac{\omega}{(s + \frac{R}{L})(s^2 + \omega^2)},$$

und nach reeller Partialbruchzerlegung

$$\mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{U_0\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} - \frac{U_0\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

was zu

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t) \right)$$

führt. Mit der Phasenverschiebung $\varphi = \arctan(\frac{\omega L}{R})$ erhalten wir

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

Im Grenzfall $L = 0$ haben wir $J = U/R$, also $J(t) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$ und keine Phasenverschiebung.

(b) **RLC-Kreis:** Wir nehmen in den Stromkreis zusätzlich einen Kondensator der Kapazität C auf. Die an ihm entstehende Spannung ist $U_c = \frac{1}{C}Q$, wobei Q die Ladung bezeichnet. Das führt zur Differentialgleichung

$$LJ' + RJ + \frac{1}{C}Q = U$$

und mit Division durch L und Ableitung nach t zur Differentialgleichung

$$J'' + \frac{R}{L} J' + \frac{1}{LC} J = \frac{\omega}{L} U_0 \cos(\omega t),$$

wenn wir dieselbe Wechselspannung wie in (a) anlegen. Wir setzen $F(s) = \mathcal{L}\{J\}(s)$ und wollen die Lösung für $J(0) = J'(0) = 0$ bestimmen. Laplacetransformation ergibt

$$s^2 F(s) + \frac{R}{L} s F(s) + \frac{1}{LC} F(s) = \frac{\omega U_0}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

also

$$F(s) = \frac{\omega U_0}{L} \frac{s}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})(s^2 + \omega^2)}.$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners: Neben den offensichtlichen $\pm i\omega$ sind dies die Nullstellen von $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$. Wir diskutieren den Fall (schwache Dämpfung), dass diese Nullstellen konjugiert komplex sind, dh also dass $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ gilt. Wir setzen $\psi := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, $\alpha := \frac{R}{2L}$ und erhalten

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s + \alpha + i\psi)(s + \alpha - i\psi) = (s + \alpha)^2 + \psi^2.$$

Reelle Partialbruchzerlegung führt also auf

$$\frac{s}{((s + \alpha)^2 + \psi^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{as + b}{(s + \alpha)^2 + \psi^2} + \frac{cs + d}{s^2 + \omega^2},$$

und wir erkennen, dass $J(t)$ eine Linearkombination von

$$e^{-\alpha t} \cos(\psi t), \quad e^{-\alpha t} \sin(\psi t), \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t)$$

ist. Im ungedämpften Fall $R = 0$ ist $\alpha = 0$, und für $\psi^2 \neq \omega^2$ ist die Lösung eine Linearkombination von $\cos(\psi t)$, $\sin(\psi t)$, $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$. Im Resonanzfall $\alpha = 0$, $\psi^2 = \omega^2$ erhalten wir als Nenner $(s^2 + \omega^2)^2 = (s - i\omega)^2(s + i\omega)^2$ und nach der Vorbemerkung ist

$$J(t) = \frac{U_0}{2L} t \sin(\omega t),$$

dh eine sich aufschaukelnde Schwingung (“Resonanzkatastrophe”).

(c) Im Fall einer allgemeinen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t), & t \geq 0, \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, \dots, y'(0) = y_1, y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (\text{S})$$

mit $a_n \neq 0$ setzt man $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, verwendet die Laplacetransformation und 23.13 und erhält eine algebraische Gleichung für $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$:

$$F(s) = \sum_{k=0}^n a_k \left(s^k Y(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j \right).$$

Diese kann man nach $Y(s)$ auflösen

$$Y(s) = \frac{F(s) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} a_k s^{k-1-j} y_j}{\sum_{k=0}^n a_k s^k},$$

und danach $y(t)$ mit $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ mittels (reeller oder komplexer) Partialbruchzerlegung bestimmen.

23.15 Sprungantwort eines Systems

Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (S). Die *Sprungantwort* h des Systems ist die Lösung y von (S) zur äußeren Anregung $f(t) = \sigma(t)$ (Einheitssprung) mit Anfangswerten $y_{n-1} = y_{n-2} = \dots = y_1 = y_0 = 0$.

Nach 23.14(c) haben wir für die Laplacetransformierte der Sprungantwort

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{\sigma(t)\}(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}.$$

Beispiel: Das System sei beschrieben durch

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t), & t \geq 0 \\ y'(0) = y_1, & y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Die Sprungantwort $h(t)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s^2 + as + b)s}.$$

Im Beispiel 23.14(a) ist die Sprungantwort $h(t)$ gegeben durch

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s + \frac{R}{L})s} = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right),$$

dh durch

$$h(t) = \frac{L}{R} \left(\sigma(t) - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

23.16 Anfangswertsatz

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}\{f\}(s) = f(0+).$$

(Der Limes bezieht sich auf reelle s !)

Beweis: Es gelte $\gamma \geq 0$ und $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $b > 0$ mit $|f(t) - f(0+)| \leq \varepsilon$ für $t \in (0, b)$. Wegen $\int_0^\infty s e^{-st} dt = 1$ gilt für $s > \gamma$:

$$\begin{aligned} |s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0+)| &\leq \int_0^\infty s e^{-st} |f(t) - f(0+)| dt \\ &\leq \int_0^b s e^{-st} \varepsilon dt + \int_b^\infty s e^{-st} 2M e^{\gamma t} dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{s}{s - \gamma} 2M \int_{b(s-\gamma)}^\infty e^{-r} dr \\ &\rightarrow \varepsilon \quad (s \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $t = \frac{r}{s-\gamma}$ substituiert haben. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Beispiel (aus 23.15): Die Lösung von $y'' + ay' + by = f(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ genügt

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{(s+a)y_0 + y_1 + \mathcal{L}\{f\}(s)}{s^2 + as + b},$$

und $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist zweimal stetig differenzierbar, wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und exponentiell beschränkt ist. Wir erhalten

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}\{y\}(s) = y_0 = y(0+).$$

23.17 Endwertsatz

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und $f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiere. Dann ist f beschränkt und es gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0+} s\mathcal{L}\{f\}(s) = f(\infty).$$

Beweis: Es gelte $|f(t)| \leq M$, $t \geq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$ mit $|f(t) - f(\infty)| \leq \varepsilon$ für $t \geq c$. Dann gilt für $s > 0$:

$$\begin{aligned} |s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(\infty)| &\leq \int_0^\infty se^{-st}|f(t) - f(\infty)| dt \\ &\leq \int_0^c se^{-st} 2M dt + \int_c^\infty se^{-st} \varepsilon dt \\ &\leq \varepsilon + 2M \int_0^{cs} e^{-r} dr \\ &\leq \varepsilon + 2Mcs \\ &\rightarrow \varepsilon \quad (s \rightarrow 0+), \end{aligned}$$

wobei wir wieder $t = \frac{r}{s}$ substituiert haben.

Warnung: In 23.16 folgt die Existenz von $f(0+)$ aus der Voraussetzung an f (stückweise Stetigkeit). Hier ist die Existenz von $f(\infty)$ **vorausgesetzt**. Selbst wenn $\lim_{s \rightarrow 0+} s\mathcal{L}\{f\}(s)$ existiert, muss $f(\infty)$ nicht unbedingt existieren.

Beispiel: Die Funktion $\cos t$ ist beschränkt und $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Es gilt $s\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s^2}{s^2+1} \rightarrow 0$ für $s \rightarrow 0+$, aber $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos t$ existiert nicht.

23.18 Korrespondenzen

Gilt $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, so nennt man $f(t)$ die *Originalfunktion* und $F(s)$ die *Bildfunktion*. Häufig schreibt man dann

$$f(t) \circ \bullet \rightarrow F(s) \quad \text{oder} \quad F(s) \bullet \rightarrow \circ f(t)$$

und nennt dies eine *Korrespondenz* (der ausgefüllte Punkt steht auf der Seite der Bildfunktion). Gebräuchlich sind Tafeln für Korrespondenzen.

Beispiele: $\sin t \circ \bullet \frac{1}{s^2+1}$, $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$. Gilt $f(t) \circ \bullet F(s)$, so gilt $e^{at} f(t) \circ \bullet F(s-a)$.

24 Komplexe Analysis

24.1 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *komplex differenzierbar*, wenn der Limes

$$F'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

in \mathbb{C} existiert. In diesem Fall heißt $F'(z_0)$ die *komplexe Ableitung von F in z_0* .

Die Funktion F heißt *holomorph* in G , falls F in **jedem** $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

Beispiele: (a) $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = 1$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $F'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $F(z) = z$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $F'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) $F(z) = e^z$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $F'(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

24.2 Rechenregeln

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und seien $F, H : G \rightarrow \mathbb{C}$ in G holomorph. Dann sind $F + H$, $F \cdot H$ in G holomorph und

$$(F + H)'(z) = F'(z) + H'(z), \quad (F \cdot H)'(z) = F'(z)H(z) + F(z)H'(z), \quad \text{für alle } z \in G.$$

Ist $H \neq 0$ in G , so ist auch $\frac{F}{H}$ holomorph in G und

$$\left(\frac{F}{H}\right)'(z) = \frac{F'(z)H(z) - F(z)H'(z)}{H(z)^2}, \quad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner $\neq 0$ ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit.

Ebenso gelten die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion auch für die komplexe Differenzierbarkeit. [Die Beweise lassen sich übertragen.]

Bemerkung: Ist F in G holomorph, so ist F in G stetig.

Beispiele: (1) $F(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf \mathbb{C} mit $F'(z) = nz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Jedes Polynom $P(z)$ mit komplexen Koeffizienten ist auf \mathbb{C} holomorph.

(2) $F(z) = z^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $F'(z) = -nz^{-n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jede rationale Funktion $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $P(z)$, $Q(z)$ komplexe Polynome sind, ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

(3) $F(z) = e^{1/z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $F'(z) = e^{1/z}(-z^{-2})$ für $z \neq 0$.

24.3 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Durch $u(x, y) := (\operatorname{Re} F)(x + iy)$ und $v(x, y) = (\operatorname{Im} F)(x + iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy \in G$ erhält man eine Funktion $G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$, die man mit den Methoden von Kapitel 19 (mehrdimensionale Differentialrechnung) behandeln kann.

Ist F in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar, sieht man anhand der Definition (mit $x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0$):

$$F'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).$$

Betrachtet man $x_0 + iy \rightarrow x_0 + iy_0$, erhält man

$$F'(z_0) = \partial_y v(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0),$$

so dass im Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-Dgln)* für u und v , die also auf G erfüllt sind, wenn F holomorph auf G ist. Umgekehrt gilt der

Satz: Ist $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ eine C^1 -Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch $F(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ definierte Funktion in G holomorph.

Beispiel: Für die Funktion $F(z) = \bar{z}$ gilt $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Die Funktion ist also nicht holomorph.

Bemerkung: Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation von $x + iy$ mit der komplexen Zahl $a + ib$ entspricht der Multiplikation des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

In diesem Sinne entspricht $F'(z_0)$ der Matrix $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} F'(z_0) & -\operatorname{Im} F'(z_0) \\ \operatorname{Im} F'(z_0) & \operatorname{Re} F'(z_0) \end{pmatrix}$. Die Ableitung im Sinne von Kapitel 19 (dh die Jacobimatrix) von $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ ist hingegen $\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$. Beim Vergleich erhält man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

24.4 Satz von der Gebietstreue, Maximumsprinzip

(a) Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $F(G) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat $z \mapsto |F(z)|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist F konstant.

24.5 Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch die Potenzreihe gegebene Funktion

$$F : K(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

holomorph in $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, und es gilt

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R.$$

Beispiele: $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sind auf \mathbb{C} holomorph.

24.6 Holomorphie von Laplacetransformierten

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann ist $F := \mathcal{L}\{f\}$ auf $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\}$ holomorph und

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma,$$

bzw. $f(t) \circ \bullet F(s) \implies F'(s) \bullet \circ (-t)f(t)$.

Beweis: Nur für beschränktes f , dh $|f(t)| \leq M$. Sei $\operatorname{Re} s > 2a > 0$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h| \leq a$. Dann gilt für jedes $b > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} f(t) dt \\ &= \int_0^b \frac{e^{-ht} - 1}{h} e^{-st} f(t) dt + \int_b^{\infty} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right) (-t) e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen

$$\int_0^b (-t) e^{-st} f(t) dt$$

(das geht wie in 22.2). Den Betrag des Integranden im zweiten Integral schätzt man ab:

$$\leq \underbrace{\left| \frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right|}_{\leq e^{|h|t}} t e^{-(\operatorname{Re} s)t} M \leq M t e^{-at}.$$

Das Integral hierüber wird für große b klein.

Ende
Woche 12

Folgerung: Unter den obigen Voraussetzungen ist F in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \gamma\}$ beliebig oft komplex differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma.$$

24.7 Kurvenintegrale

Eine *Kurve* ist hier eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, für die es $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so gibt, dass γ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, stetig differenzierbar ist. Die Kurve γ heißt *einfach geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und γ auf $[a, b)$ injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.

Dabei heißt γ in $t_* \in [a, b]$ differenzierbar, falls der Limes

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}$$

in \mathbb{C} existiert.

Bemerkung: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ differenzierbar. Dann ist $F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \quad t \in [a, b],$$

vergleiche Bemerkung in 24.3.

Definition: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve und $F : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} F(z) dz := \int_a^b F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei die rechte Seite als $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$ zu verstehen ist, wenn t_0, \dots, t_n wie oben in der Definition sind.

Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Abschätzung: Sind F und γ wie in der Definition, so gilt

$$\left| \int_{\gamma} F(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max\{|F(z)| : z \in \gamma([a, b])\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet (siehe 19.6).

Wichtiges Beispiel: Sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$. Dann ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, und es gilt $\gamma'(t) = ire^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sei $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} ir e^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n = -1$ ist das Kurvenintegral also $= 2\pi i$. Für $n \neq -1$ erhalten wir

$$= ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

da $e^{2\pi i(n+1)} = 1$. Beachte, dass F für $n \geq 0$ auf \mathbb{C} holomorph ist und für $n < 0$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist.

24.8 Cauchyscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für jede einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ gilt dann

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 0.$$

Für den Begriff *einfach zusammenhängend* siehe 20.3, z.B. sind konvexe Gebiete einfach zusammenhängend. Dabei heißt $G \subset \mathbb{C}$ *konvex*, falls zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}$ in G enthalten ist.

Beispiel: Damit ist das Integral im Beispiel von 24.7 = 0 für $n \geq 0$.

Bemerkungen zum Beweis: Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage äquivalent ist zur Existenz einer holomorphen Funktion $H : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H' = F$ auf G (es ist dann nämlich

$$\int_{\gamma} H'(z) dz = \int_a^b H'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (H \circ \gamma)'(t) dt = H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)) = 0,$$

vergleiche mit 20.4, wo die Situation ähnlich ist).

Ist G konvex, so erhält man ein solches H , indem man $z_* \in G$ fixiert und $H(z) := \int_{S[z_*, z]} F(w) dw$ setzt. Gilt der Satz für "Dreiecke" γ , so hat man für $z, z_0 \in G$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - F(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{S[z_0, z]} (F(w) - F(z_0)) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \max\{|F(w) - F(z_0)| : w \in S[z_0, z]\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $z \rightarrow z_0$, da F in z_0 stetig ist.

Es reicht deshalb, die Aussage für "Dreiecke" γ zu zeigen (Satz von Cauchy-Goursat).

Beispiele: (1) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $\int_{\gamma} z^n dz = 0$, da F auf \mathbb{C} holomorph ist, \mathbb{C} konvex ist und γ einfach geschlossen.

(2) Sei γ wie eben und $F(z) = e^z$. Nach denselben Argumenten wie in (1) ist $\int_{\gamma} e^z dz = 0$.

(3) $F(z) = 1/z$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, aber $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

24.9 Cauchysche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z , welches “innerhalb von γ ” liegt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweisidee: Man überlegt sich, dass 24.8 auch noch gilt, wenn die Funktion auf G stetig und in $G \setminus \{z\}$ holomorph ist. Diese Variante von 24.8 wendet man auf die Funktion $\zeta \mapsto \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z}$ an und beachtet das Beispiel aus 24.7 für $n = -1$:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - F(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=1}.$$

Beispiele: (1) Die Anwendung auf $F(\zeta) = 1$ gibt das Ergebnis von 24.7 im Fall $n = -1$ (man nehme $z = 0$).

(2) Nimmt man $F(\zeta) = e^{\zeta}$ und $z = 0$, sowie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so erhält man

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\zeta}}{\zeta} d\zeta = 2\pi i.$$

24.10 Folgerungen (a): Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar (man differenziere unter dem Integralzeichen, ähnlich wie im Kapitel 22 über Parameterintegrale). Unter den Voraussetzungen von 24.9 gilt

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b): Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist G offen, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so gilt

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Die Reihe konvergiert dabei absolut und für jedes $\rho \in (0, R)$ auf $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ gleichmäßig.

Beweis: Verwende die Formel in 24.9, wobei γ der Kreis um z_0 mit Radius R ist und $\{z : |z - z_0| \leq R\} \subset G$ gilt. Entwickle den Integranden in eine geometrische Reihe

$$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{F(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Nun vertausche man Integration und Reihe (für $|z - z_0| \leq \rho < R$ konvergiert die Reihe gleichmäßig) und verwende die Formel in (a).

24.11 Laurententwicklung: Ist G offen, $z_0 \in G$ und $F : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine *isolierte Singularität von F* . Es gibt dann eindeutig bestimmte Koeffizienten a_k , $k \in \mathbb{Z}$, derart, dass gilt

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Konvergenz der Reihe ist zu verstehen als Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{-1}$ (*Hauptteil* der Reihe) und $\sum_{k=0}^{\infty}$ (*Nebenteil* der Reihe). Die Reihe konvergiert dabei absolut und für alle $0 < \rho_0 < \rho_1 < R$ auf $\{z : \rho_0 \leq |z - z_0| \leq \rho_1\}$ gleichmäßig. Der Koeffizient a_{-1} heißt *Residuum von F in z_0* , geschrieben

$$\operatorname{res}(F; z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität z_0 von F heißt *hebbare Singularität*, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, *Pol n -ter Ordnung*, falls $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -n$ ist, und *wesentliche Singularität* sonst.

Beweisidee zur Laurententwicklung: Nur für $z_0 = 0$. Ist $0 < \rho_0 < |z| < \rho_1 < R$, so gilt wegen 24.9:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: F_1(z) - F_0(z),$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \rightarrow G$, $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$. Die Funktionen $F_1(z)$ und $F_0(\frac{1}{z})$ lassen sich in Potenzreihen um 0 entwickeln, die für $|z| < \rho_1$ bzw. $|z| < 1/\rho_0$ konvergieren. Diese ergeben Neben- und Hauptteil der Laurentreihe.

Beispiel: (a) $F(z) = z^{-n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, hat in $z_0 = 0$ einen Pol n -ter Ordnung. Dabei gilt $\operatorname{res}(z^{-1}; 0) = 1$ und $\operatorname{res}(z^{-n}; 0) = 0$ für $n \geq 2$.

(b) $F(z) = e^{2/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Wegen $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{z^{-k}}{k!}$ für $z \neq 0$ gilt $\operatorname{res}(F; 0) = 2$.

Bemerkung (ohne Beweis): Die Funktion F hat einen Pol in z_0 genau dann, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |F(z)| = \infty$ gilt. Die Singularität in z_0 ist hebbar genau dann, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$ existiert.

24.12 Residuensatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien $z_1, z_2, \dots, z_m \in G$ verschieden und innerhalb von γ , und sei $F : G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{res}(F; z_j).$$

Beweis: Mithilfe von 24.8 ist das Kurvenintegral links

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} F(z) dz,$$

wobei γ_j jeweils ein kleiner Kreis um z_j ist, so dass man die Laurententwicklung von F um z_j verwenden kann. Dann vertauscht man Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz!) und verwendet das Beispiel in 24.7.

24.13 Berechnung von Residuen: (a) Besitzt F in z_0 einen höchstens n -fachen Pol ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n F(z) \right) \right) \Big|_{z=z_0}.$$

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen ist

$$F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{und} \quad G(z) := (z-z_0)^n F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k$$

für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0 . Vergleich mit der Potenzreihe von $G(z)$ ergibt $a_{-1} = \frac{G^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$.

(b) Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $G(z_0) \neq 0$, $H(z_0) = 0$, $H'(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}.$$

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist z_0 einfache Nullstelle von $H(z)$, also ist z_0 hebbare Singularität von $(z-z_0)F(z)$. Damit ist z_0 einfache Polstelle von F und (a) ergibt die angegebene Formel.

24.14 Die komplexe Umkehrformel: Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die *stückweise glatt* ist in dem Sinne, dass eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \rightarrow \infty$ existiert mit

- (i) f ist in $[0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ stetig differenzierbar,
- (ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+)$, $f'(t_j+)$, $j \in \mathbb{N}_0$, und $f(t_j-)$, $f'(t_j-)$, $j \in \mathbb{N}$, existieren in \mathbb{C} .

In Punkten t_j , in denen f nicht differenzierbar ist, setzen wir $f'(t_j) := (f'(t_j+) + f'(t_j-))/2$. Es seien f und f' von exponentieller Ordnung γ .

Sei $F(s) := \mathcal{L}\{f\}(s)$ für $\operatorname{Re} s > \gamma$. Für jedes $c > \gamma$ gilt dann

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} F(s) ds = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{2} f(0+) & , t = 0 \\ f(t) & , t > 0, f \text{ in } t \text{ stetig} \\ \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)) & , t > 0, f \text{ in } t \text{ unstetig} \end{cases}.$$

(ohne Beweis)

24.15 Spezialfall: Die Zeitfunktion f sei so, dass zu $F(s) := \mathcal{L}\{f\}(s)$ verschiedene $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{F} : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ existieren mit $F(s) = \tilde{F}(s)$ für $\operatorname{Re} s > \gamma$.

Bemerkung: Ein solches \tilde{F} ist eindeutig bestimmt! (ohne Beweis)

Für festes $A > 0$ schließen wir den Weg $g_A : [-A, A] \rightarrow \mathbb{C}$, $g_A(r) = c + ir$, durch einen Kreisbogen $\gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi}$, wobei $R^2 = c^2 + A^2$ und der Winkel φ ein geeignetes Intervall durchläuft. Für große A liegen alle Singularitäten a_1, a_2, \dots, a_m innerhalb der durch g_A und γ_R gebildeten einfach geschlossenen, positiv orientierten Kurve, und nach dem Residuensatz 24.12 gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{st} \tilde{F}(s) ds = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}(e^{st} \tilde{F}(s); a_j).$$

Wir interessieren uns für den Limes $A \rightarrow \infty$ des ersten Kurvenintegrals. Für $A \rightarrow \infty$ gilt auch $R \rightarrow \infty$ und man kann gegebenenfalls das folgende Lemma anwenden.

24.16 Jordansches Lemma: Die Funktion H sei auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ holomorph und es gelte $|H(z)| \leq C(R)$ für $|z| = R$ mit $C(R) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$). Dann gilt für jedes $t > 0$:

$$\int_{\gamma_R} e^{st} H(s) ds \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty),$$

wobei $\gamma_R(\varphi) := Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Folgerung: Sind in der Situation von 24.15 die Voraussetzungen von 24.16 für $H = \tilde{F}$ erfüllt, so ist für $t > 0$:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} \tilde{F}(s) ds = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}(e^{st} \tilde{F}(s); a_j).$$

Beispiel: Sei $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ mit komplexen Polynomen $P(s)$, $Q(s)$ und $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s)$, wobei

$$Q(s) = (s - a_1) \cdot (s - a_2) \cdot \dots \cdot (s - a_n)$$

mit verschiedenen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$f(t) = \sigma(t) \sum_{j=1}^n A_j e^{a_j t}, \quad \text{wobei } A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

(Formel von Heaviside), denn in diesem Fall ist nach 24.13 (b):

$$\operatorname{res}(e^{st} \frac{P(s)}{Q(s)}; a_j) = \left(e^{st} \frac{P(s)}{Q'(s)} \right) \Big|_{s=a_j} = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)} e^{a_j t}$$

für $t > 0$.

Beispiel: $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Hier ist $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ und $P(s) = 1$, $Q(s) = s^2 + s$, $Q'(s) = 2s + 1$ und also

$$F(s) \bullet \circ f(t) = \frac{P(0)}{Q'(0)} e^{0t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} = 1 - e^{-t}.$$

24.17 Logarithmus und allgemeine Potenz

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man schreiben als $z = |z|e^{i\varphi}$. Dabei heißt φ *Argument* von z , geschrieben $\arg z$. Das Argument ist **nicht eindeutig**: Ist φ ein Argument von z , so auch $\varphi + 2k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Der *Hauptzweig des Arguments* $\text{Arg } z$ nimmt für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ Werte in $(-\pi, \pi)$ an.

Definition: Der Hauptzweig Log des Logarithmus ist gegeben durch

$$\text{Log } z := \ln |z| + i \text{Arg } z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Andere Zweige des Logarithmus erhält man, indem man andere Zweige des Arguments betrachtet.

Bemerkung: $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : |\text{Im } w| < \pi\}$ ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung \exp . Es gilt

$$\text{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allgemeine Potenz: Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$$

den Hauptzweig der α -ten Potenz.

Wurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man für den Hauptzweig der n -ten Wurzel

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp(i \text{Arg } z / n), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Berücksichtigt man die anderen Werte des Arguments, so sieht man, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n -te Wurzeln besitzt.

24.18 Konforme Abbildungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine injektive holomorphe Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist *winkeltreu*: Sind $\gamma, \psi : [-1, 1] \rightarrow G$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(0) = z_0 = \psi(0)$, die sich in z_0 im Winkel φ schneiden, so schneiden sich die Bildkurven $F \circ \gamma$ und $F \circ \psi$ in $F(z_0)$ ebenfalls im Winkel φ .

Solche Abbildungen heißen auch *konform*.

Anwendung: In der zweidimensionalen Elektrostatik schneiden sich Feldlinien und Äquipotentiallinien im rechten Winkel. Diese Beziehung bleibt unter konformen Abbildungen erhalten.

25 Laplacetransformation von Distributionen

25.1 Die Grundidee für Distributionen

Statt Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, betrachtet man Abbildungen

$$T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt.$$

Hierbei ist

$$\mathcal{D} := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \text{es gibt } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \notin [a, b] \}$$

der Raum der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger.

Beispiel: Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) := \begin{cases} e^{-(1-t^2)^{-1}} & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| \geq 1 \end{cases}$, gehört zu \mathcal{D} (mit $a = -1$ und $b = 1$). Vergleiche mit dem ähnlichen Beispiel in 13.4 (HM I).

Bemerkung: Die Abbildung T_f ist **linear** und man kann die Funktion f aus T_f im wesentlichen zurückgewinnen.

Beispiel: Diracsche Deltafunktion $\delta = \delta_0$ (oder Diracstoß in 0, "Masse 1 sitzt im Punkt 0"). Der Vorstellung nach wird δ_0 approximiert durch $g_n := ng(n \cdot)$, wobei $g \geq 0$ integrierbar mit $\int g = 1$ und $g = 0$ außerhalb von $[-1, 1]$. Man hat dann für $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$T_{g_n}(\varphi) = n \int_{-1/n}^{1/n} g(nt)\varphi(t) dt = \int_{-1}^1 g(\tau)\varphi(\tau/n) d\tau \rightarrow \varphi(0) \quad (n \rightarrow \infty),$$

und setzt also $\delta_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta_0(\varphi) := \varphi(0)$. Diese Abbildung ist linear, und es gibt **keine** integrierbare Funktion f mit $\delta_0 = T_f$!

Analog definiert man den *Diracstoß* δ_b in $b \in \mathbb{R}$ durch $\delta_b(\varphi) := \varphi(b)$ für $\varphi \in \mathcal{D}$.

Bemerkung: Die in der Definition von Distributionen eigentlich noch enthaltene *Stetigkeit* $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ignorieren wir zunächst.

Ende
Woche 13

25.2 Ableitung von Distributionen

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^1 -Funktion, so gilt für $\varphi \in \mathcal{D}$ nach der Regel der partiellen Integration

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t) dt = T_f(-\varphi').$$

Dies motiviert die

Definition: Ist $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, so definiert man die *Ableitung* DT von T durch

$$DT(\varphi) := T(-\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Diese Abbildung ist wieder linear.

Beispiele: (1) Es gilt $D\delta_0(\varphi) = \delta_0(-\varphi') = -\varphi'(0)$.

(2) Ist $\sigma(t)$ der Einheitssprung, so ist

$$DT_\sigma(\varphi) = T_\sigma(-\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t) dt = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Also ist die distributionelle Ableitung des Einheitssprungs $\sigma(t)$ der Diracstoß δ_0 in 0 (dh der *Einheitsimpuls*).

Bemerkung: Analog setzt man für jedes $n \in \mathbb{N}$: $D^n T(\varphi) := (-1)^n T(\varphi^{(n)})$.

25.3 Ableitung von stückweise glatten Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise glatt im Sinne von 24.14 ist (mit einer entsprechenden Folge (t_j)).

Dann ist

$$\begin{aligned} (DT_f)(\varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)(-\varphi'(t)) dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[-f(t)\varphi(t) \Big|_{t_j+}^{t_{j+1}-} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t)\varphi(t) dt \right] \\ &= \int_0^\infty f'(t)\varphi(t) dt + \sum_{j=0}^{\infty} f(t_{j+})\varphi(t_j) - f(t_{j+1}-)\varphi(t_{j+1}) \\ &= T_{f'}(\varphi) + f(0+)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{\infty} (f(t_{j+}) - f(t_{j-}))\varphi(t_j), \end{aligned}$$

also

$$D(T_f) = T_{f'} + f(0+)\delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(f(t_{j+}) - f(t_{j-}))}_{\text{Sprunghöhe von } f \text{ in } t_j} \delta_{t_j}.$$

Ist f zusätzlich in $(0, \infty)$ stetig, so hat man

$$D(T_f) = T_{f'} + f(0+)\delta_0.$$

Verallgemeinerte Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für die

$$f_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_+(t) := \sigma(t)f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ f(t) & , t \geq 0 \end{cases},$$

auf $[0, \infty)$ stückweise glatt ist und für die $f(0-)$ existiert (siehe z.B. bei Föllinger):

$$\dot{f} := T_{(f_+)'} + \sum_{j=0}^{\infty} (f(t_{j+}) - f(t_{j-}))\delta_{t_j} = D(T_{f_+}) - f(0-)\delta_0.$$

Hierdurch wird eine eventuelle Vorgeschichte von f für $t < 0$ berücksichtigt. Beachte, dass \check{f} eine Distribution ist.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(t) := \begin{cases} 1 & , t \in [n, n+1] \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$.
Hier ist $t_j = j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ mit Sprunghöhe $(-1)^j$. Es gilt $f'(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ und

$$D(T_f) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \delta_j.$$

Die Funktion f ist beschränkt, also von exponentieller Ordnung 0. Die Distribution T_f ist von exponentieller Ordnung 0 mit positivem Träger.

25.4 Laplacetransformierbare Distributionen

Definition: Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger*, falls es $M \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$|T(\varphi)| \leq M \underbrace{\sum_{j=0}^k \int_0^{\infty} e^{\gamma t} |\varphi^{(j)}(t)| dt}_{=: p_{k,\gamma}(\varphi)}.$$

Bemerkung: Es gibt dann eine eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung \tilde{T} von T auf $\mathcal{D}_{k,\gamma} := \{\varphi \in C^k : p_{k,\gamma}(\varphi) < \infty\}$, die derselben Abschätzung genügt. Wir bezeichnen die Fortsetzung der Einfachheit halber auch mit T .

Beispiele: (1) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig ist und $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$, genügt, so ist T_f eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |\varphi(t)| dt \leq M p_{0,\gamma}(\varphi).$$

(2) Für $b \geq 0$ ist δ_b für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger: Wegen

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b) = - \int_b^{\infty} \varphi'(t) dt$$

gilt $|\delta_b(\varphi)| \leq p_{1,0}(\varphi) \leq p_{1,\gamma}(\varphi)$ für $\gamma \geq 0$. Für $\gamma < 0$ ist

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b) = -e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} (e^{\gamma t} \varphi)'(t) dt = -\gamma e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} e^{\gamma t} \varphi(t) dt - e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} e^{\gamma t} \varphi'(t) dt,$$

und also

$$|\delta_b(\varphi)| \leq \max\{|\gamma|, 1\} e^{b|\gamma|} p_{1,\gamma}(\varphi).$$

25.5 Laplacetransformation von Distributionen

Wir definieren $e_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für $s \in \mathbb{C}$ durch $e_s(t) := e^{-st}$, $t \in \mathbb{R}$.

Beobachtung: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ ist, so gilt

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = T_f(e_s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Definition: Ist $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger, so definiert man die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\{T\}$ durch

$$\mathcal{L}\{T\}(s) := T(e_s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Für $\operatorname{Re} s > \gamma$ gilt nämlich $e_s \in \mathcal{D}_{k,\gamma}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$p_{k,\gamma}(e_s) = \sum_{j=0}^k \int_0^\infty e^{\gamma t} |s|^j |e^{-st}| dt = \frac{\sum_{j=0}^k |s|^j}{\operatorname{Re} s - \gamma}.$$

Beispiele: (1) $\mathcal{L}\{\delta_0\}(s) = 1$ für jedes $s \in \mathbb{C}$.

(2) Für $b > 0$ gilt $\mathcal{L}\{\delta_b\}(s) = e^{-sb}$ für jedes $s \in \mathbb{C}$.

(3) $\mathcal{L}\{D\delta_0\}(s) = -e'_s(0) = s$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und allgemeiner $\mathcal{L}\{D^n\delta_0\}(s) = s^n$ für $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

25.6 Ableitungsregel

Ist $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger, so gilt für $\operatorname{Re} s > \gamma$:

$$\mathcal{L}\{DT\}(s) = s\mathcal{L}\{T\}(s) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{D^n T\}(s) = s^n \mathcal{L}\{T\}(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist nämlich

$$\mathcal{L}\{DT\}(s) = DT(e_s) = T(-e'_s) = sT(e_s) = s\mathcal{L}\{T\}(s).$$

Bemerkung: (a) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise glatt und von exponentieller Ordnung γ ist, so ist

$$\mathcal{L}\{D(T_f)\}(s) = s\mathcal{L}\{T_f\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Andererseits ist mithilfe von 25.3:

$$\mathcal{L}\{DT_f\}(s) = \mathcal{L}\{T_{f'}\}(s) + f(0+) + \sum_{j=1}^{\infty} (f(t_j+) - f(t_j-))e^{-t_j s}.$$

Somit haben wir, falls auch f' von exponentieller Ordnung γ ist,

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0+) - \sum_{j=1}^{\infty} (f(t_j+) - f(t_j-))e^{-t_j s}$$

für $Re s > \gamma$. Ist f zusätzlich in $(0, \infty)$ stetig, so erhalten wir die Formel aus 23.12 zurück.

Beispiel: Für die Funktion aus dem Beispiel in 25.3 gilt

$$\mathcal{L}\{D(T_f)\}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{-j}, \quad Re s > 0.$$

Bemerkung: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[0, \infty)$ stückweise glatt und von exponentieller Ordnung γ und existiert $f(0-)$, so gilt

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0-), \quad Re s > \gamma,$$

siehe bei Föllinger.

25.7 Impulsantwort differentieller Systeme

In der Systemtheorie liefert ein System auf einen Input $u(t)$ einen Output $y(t)$. Hierbei sind u und y im allgemeinen Distributionen.

Die *Impulsantwort* g eines Systems ist der Output y des Systems, wenn man als Input u den Einheitsimpuls δ_0 anlegt. Dabei sei das System vor $t = 0$ im Ruhezustand. Die Laplacetransformierte $G(s) := \mathcal{L}\{g\}(s)$ heißt *Übertragungsfunktion* des Systems.

Differentielle Systeme sind von der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass das System vor dem Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist (dh $y(t) = 0$ und auch $u(t) = 0$ für $t < 0$). Wir interpretieren die Ableitungen als **distributionelle Ableitungen** nach 25.2¹ und erhalten für $u = \delta_0$:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

als Übertragungsfunktion, dh als Laplacetransformierte der Impulsantwort g . Mittels Partialbruchzerlegung lässt sich die Impulsantwort $g = \mathcal{L}^{-1}\{G\}$ bestimmen.

¹die hier – unter geeigneten Voraussetzungen an y und u – mit verallgemeinerten Ableitungen nach 25.3 übereinstimmen

Bemerkung: Vergleicht man mit 23.15, so sieht man

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{h(t)\}(s),$$

und die Impulsantwort $g(t)$ ist distributionelle Ableitung der Sprungantwort $h(t)$ aus 23.15. Die dort betrachteten Systeme entsprechen dem Spezialfall $m = 0$.

Beispiele: (1) Das System sei gegeben durch $y'' - 4y' + 4y = u$. Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = (s^2 - 4s + 4)^{-1} = (s - 2)^{-2}.$$

Die Impulsantwort des Systems ist also

$$g(t) = \sigma(t)te^{2t}.$$

(2) Das System sei gegeben durch $y'' - 4y' + 4y = u' - u$. Die Übertragungsfunktion ist dann

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{s - 2} + \frac{1}{(s - 2)^2}.$$

Die Impulsantwort des Systems ist somit

$$g(t) = \sigma(t)(e^{2t} + te^{2t}).$$

Die Bedeutung der Impulsantwort wird ersichtlich, wenn man die Faltung von Distributionen und allgemeine lineare zeitinvariante Systeme betrachtet.

BONUS – Nicht in der Vorlesung gebracht

25.B1 Translationen (Verschiebungen) von Distributionen

Definiere für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{R}$ die *Verschiebung von f um b nach rechts* durch

$$\tau_b f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (\tau_b f)(t) = f(t - b).$$

Für stetiges f und $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt dann:

$$T_{\tau_b f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_b f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - b)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\varphi(\xi + b) d\xi = T_f(\tau_{-b}\varphi).$$

Wir definieren also für Distributionen T und $b \in \mathbb{R}$ die um b nach rechts verschobene Distribution $\tau_b T$ durch

$$\tau_b T(\varphi) = T(\tau_{-b}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

25.B2 Faltung von Distributionen

Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ sind, so gilt $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, und für $\varphi \in \mathcal{D}$ nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(r)\varphi(r+t) dr dt = T_f(t \mapsto T_g(\tau_{-t}\varphi)).$$

Wir setzen also für Distributionen $S, T \in \mathcal{D}'$ von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger:

$$T * S(\varphi) = T(t \mapsto S(\tau_{-t}\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dann ist $T * S$ für jedes $\varepsilon > 0$ von exponentieller Ordnung $\gamma + \varepsilon$ mit positivem Träger und

$$\mathcal{L}\{T * S\}(s) = \mathcal{L}\{T\}(s) \cdot \mathcal{L}\{S\}(s), \quad \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Beweis der Formel: Wir haben

$$\mathcal{L}\{T * S\}(s) = T * S(e_s) = T(t \mapsto S(\tau_{-t}e_s))$$

und $\tau_{-t}e_s(u) = e_s(t + u) = e^{-st}e_s(u)$, also

$$S(\tau_{-t}e_s) = e^{-st} S(e_s) = e_s(t) \mathcal{L}\{S\}(s)$$

und somit

$$\mathcal{L}\{T * S\}(s) = T(e_s \mathcal{L}\{S\}(s)) = T(e_s) \mathcal{L}\{S\}(s) = \mathcal{L}\{T\}(s) \mathcal{L}\{S\}(s).$$

Beispiele: (1) Es gilt $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$.

(2) Für $b > 0$ gilt $\delta_b * T = \tau_b T$, denn für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$(\delta_b * T)(\varphi) = T(t \mapsto \delta_b(\tau_{-t}\varphi)) = T(t \mapsto \varphi(b + t)) = T(\tau_{-b}\varphi) = (\tau_b T)(\varphi).$$

(3) Man kann zeigen, dass $D(T * S) = (DT) * S = T * (DS)$ gilt, insbesondere ist $DT = (D\delta_0) * T$.

Alle diese Beispiele sind mit der Faltungsregel für die Laplacetransformation von Distributionen konsistent.

25.B3 Konvergenz von Distributionen

Eine Folge (T_n) von Distributionen heißt *konvergent* gegen eine Distribution T , falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beispiel: Im Beispiel in 25.1 gilt $T_{g_n} \rightarrow \delta_0$ ($n \rightarrow \infty$).

25.B4 Anwendung: Lineare zeitinvariante Übertragungsglieder

Ein Übertragungsglied wird repräsentiert durch eine Abbildung ϕ , die “Eingängen” (Inputs) u gewisse “Ausgänge” (Outputs) y zuordnet: $y = \phi(u)$. Hierbei sind sowohl die Inputs u als auch die Outputs y Distributionen.

Wir verlangen, dass das Übertragungsglied folgende Eigenschaften hat:

- **Linearität:** $\phi(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \phi(u_1) + \beta \phi(u_2)$;
- **Stetigkeit:** Gilt $u_n \rightarrow u$ in \mathcal{D}' , so folgt $\phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$ in \mathcal{D}' ;
- **Zeitinvarianz:** Ist $b > 0$, so gilt $\phi(\tau_b u) = \tau_b \phi(u)$;
- **Kausalität und exponentielle Beschränktheit:** Ist u exponentiell beschränkt mit positivem Träger, so ist auch $y = \phi(u)$ exponentiell beschränkt mit positivem Träger.

Hierbei bedeutet “Kausalität”, dass die Wirkung y nicht *vor* der Ursache u einsetzen kann (dh: ist $u = 0$ vor $t = 0$, so ist auch $y = 0$ vor $t = 0$), und “exponentielle Beschränktheit” bedeutet, dass die Distribution von exponentieller Ordnung γ für irgendein reelles γ ist.

Für ein solches Übertragungsglied, das durch die Abbildung ϕ repräsentiert wird, setzen wir $g := \phi(\delta_0)$. Dann ist g exponentiell beschränkt mit positivem Träger. Für $b > 0$ gilt wegen der Zeitinvarianz

$$\delta_b * g = \tau_b g = \tau_b \phi(\delta_0) = \phi(\tau_b \delta_0) = \phi(\delta_b).$$

Wegen Linearität und Stetigkeit folgt

$$\phi(T_f) = g * T_f$$

für jede Funktion f , die auf einem Intervall $[a, b] \subset [0, \infty)$ stetig ist. Dazu approximiert man

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$$

durch Riemann-Summen

$$\sum_{j=1}^m f(t_j) \varphi(t_j) (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^m \left(f(t_j) (t_j - t_{j-1}) \right) \delta_{t_j}(\varphi).$$

Ein weiteres Approximationsargument zeigt, dass $\phi(u) = g * u$ für alle Distributionen u , die exponentiell beschränkt mit positivem Träger sind.

Durch Laplacetransformation (vgl. die Faltungsregel in 25.B2) erhalten wir für $y = \phi(u) = g * u$:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{u\}(s), \quad \operatorname{Re} s \text{ groß,}$$

wobei $G(s) := \mathcal{L}\{g\}(s)$ *Übertragungsfunktion* des Übertragungsgliedes heißt.

Die (komplizierte) Faltung mit der sogenannten *Gewichtsfunktion* g geht also unter Laplacetransformation über in die (einfache) Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $G(s)$. Wegen $g = \phi(\delta_0)$ nennt man g auch die *Impulsantwort* des Systems (dh die Antwort des Systems auf den *Einheitsimpuls* δ_0). Die *Sprungantwort* h des Systems ist im übrigen gegeben durch $h = \phi(T_\sigma) = g * T_\sigma$.

Bemerkung: Für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$(g * T_\sigma)(\varphi) = g(t \mapsto T_\sigma(\tau_{-t}\varphi)) = g(t \mapsto \int_t^\infty \varphi(\xi) d\xi),$$

woraus $Dh(\varphi) = h(-\varphi') = g(\varphi)$, also $Dh = g$ folgt. Die Impulsantwort des Systems ist also die distributionelle Ableitung der Sprungantwort.

Ende des BONUS

26 Fouriertransformation und zweiseitige Laplace- transformation

26.1 Zweiseitige Laplacetransformation

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *stückweise stetig*, dh es gibt eine Doppelfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $t_n < t_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $|t_n| \rightarrow \infty$, $|n| \rightarrow \infty$, so, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion f auf (t_n, t_{n+1}) stetig ist und die Grenzwerte $f(t_n \pm)$ existieren. Es gelte $|f(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, für ein $\gamma > 0$ und ein $M > 0$. Die *zweiseitige Laplacetransformation von f* ist definiert durch

$$\mathcal{L}_{II}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty, a \rightarrow -\infty} \int_a^b e^{-st} f(t) dt,$$

für diejenigen $s \in \mathbb{C}$, für die dieses Integral konvergiert.

Konvergenz: Das Integral $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ konvergiert absolut für $\operatorname{Re} s > -\gamma$ (bekannt). Das Integral $\int_{-\infty}^0 e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{s\tau} f(-\tau) d\tau$ konvergiert absolut für $\operatorname{Re}(-s) > -\gamma$, dh für $\operatorname{Re} s < \gamma$.

Bemerkung: Aus 24.6 erhalten wir, dass die Funktion $F(s) := \mathcal{L}_{II}\{f\}(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} s| < \gamma\}$ holomorph ist mit

$$F'(s) = \mathcal{L}_{II}\{(-t)f(t)\}(s), \quad |\operatorname{Re} s| < \gamma.$$

Beispiel: $f(t) = e^{-a|t|}$, wobei $\gamma = \operatorname{Re} a > 0$. Es gilt für $|\operatorname{Re} s| < \gamma$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-a|t|} dt &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s+a} + \int_0^{\infty} e^{(s-a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a+s} + \frac{1}{a-s} = \frac{2a}{a^2 - s^2}. \end{aligned}$$

26.2 Fouriertransformation

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *stückweise stetig* und *absolut integrierbar* (aib), dh $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Die *Fouriertransformierte von f* definiert man für $\omega \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Das Integral konvergiert dabei für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ absolut, da $|e^{-i\omega t} f(t)| = |f(t)|$ für jedes t gilt und f absolut integrierbar ist.

Bemerkung: Die Fouriertransformation entspricht der zweiseitigen Laplacetransformation für $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, dh für s auf der imaginären Achse:

$$\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{L}_{II}\{f\}(i\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = e^{-a|t|}$, ist für $a > 0$ absolut integrierbar. Es gilt

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zur zweiseitigen Laplacetransformation in 26.1 ist die Fouriertransformation einer absolut integrierbaren Funktion nicht unbedingt auf einem “Streifen” holomorph, ja im allgemeinen noch nicht einmal reell differenzierbar.

26.3 Rechenregeln für die Fouriertransformation: Im folgenden sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar.

(a) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathcal{F}\{f(t-b)\}(\omega) = e^{-i\omega b} \mathcal{F}f(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathcal{F}\{e^{itb}f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega - b)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(d) Ist f stetig und differenzierbar derart, dass f' wieder stückweise stetig und absolut integrierbar ist, so gilt

$$\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = i\omega \mathcal{F}f(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(e) Ist $t \mapsto tf(t)$ absolut integrierbar, so ist $\mathcal{F}f$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathcal{F}f)'(\omega) = \mathcal{F}\{(-it)f(t)\}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Die Beweise von (a), (b), (c), (e) sind denen für die Laplacetransformation sehr ähnlich. Bei (d) beachte man, dass absolute Integrierbarkeit von f' Existenz der Grenzwerte $f(\pm\infty)$ impliziert, da etwa

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(t) dt$$

für $b \rightarrow \infty$ konvergiert. Da f außerdem absolut integrierbar ist, muss $f(\pm\infty) = 0$ gelten. Für $a, b > 0$ ist dann mittels partieller Integration

$$\int_{-a}^b e^{-i\omega t} f'(t) dt = e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-a}^b + i\omega \int_{-a}^b e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

und (d) folgt für $a, b \rightarrow \infty$.

26.4 Beispiel $\phi(t) = e^{-t^2/2}$: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\phi'(t) = -t\phi(t)$. Wir wenden die Fouriertransformation auf diese Gleichung an und erhalten (nach 26.3(d) und 26.3(e)):

$$i\omega \mathcal{F}\phi(\omega) = \mathcal{F}\{\phi'\}(\omega) = \mathcal{F}\{-t\phi(t)\}(\omega) = -i(\mathcal{F}\phi)'(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

also $(\mathcal{F}\phi)'(\omega) = -\omega(\mathcal{F}\phi)(\omega)$. Also löst $\mathcal{F}\phi$ dieselbe Differentialgleichung wie ϕ und es folgt

$$\mathcal{F}\phi(\omega) = \mathcal{F}\phi(0) \cdot e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

da $\mathcal{F}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

26.5 Riemann-Lebesgue-Lemma: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann ist die Funktion $\mathcal{F}f$ (gleichmäßig) stetig und es gilt $\mathcal{F}f(\omega) \rightarrow 0$, $|\omega| \rightarrow \infty$.

Beweisskizze: Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $\delta > 0$ mit $|e^{-ix} - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\omega + h) - \mathcal{F}f(\omega)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1||f(t)| dt \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \int_{|t| \leq \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt} + 2 \underbrace{\int_{|t| > \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}f$ (gleichmäßig) stetig.

Ist f gegeben durch $f(t) = 1$, $t \in [a, b]$, und $f(t) = 0$ sonst, so gilt für $\omega \neq 0$:

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}$$

und somit $\mathcal{F}f(\omega) \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$. Dies gilt dann auch für alle Linearkombinationen solcher Funktionen. Den Fall allgemeiner absolut integrierbarer Funktionen erhält man durch ein Approximationsargument.

26.6 Faltung und Fouriertransformation: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar und g sei beschränkt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $\tau \mapsto f(\tau)g(t - \tau)$ stückweise stetig und absolut integrierbar und die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

heißt *Faltung von f und g* , geschrieben $h =: f * g$. Die Funktion $f * g$ ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar und es gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}f(\omega) \cdot \mathcal{F}g(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Gilt zusätzlich $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $f * g(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Dies gibt den Zusammenhang zur Faltung aus 23.8.

Beweis (nicht für Stetigkeit): Gilt $|g(t)| \leq M$, $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t - \tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau,$$

und h ist beschränkt. Weiter gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| |g(t-\tau)| d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)| dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

und h ist absolut integrierbar. Der Beweis für die Faltungsregel der Fouriertransformation verwendet ähnliche Argumente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $f(t) := \begin{cases} 1 & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$. Dann gilt

$$h(t) := f * f(t) = \int_{-1}^1 f(t-\tau) d\tau = \text{Länge des Intervalls } [-1, 1] \cap [t-1, t+1] = \begin{cases} 2 - |t| & , |t| \leq 2 \\ 0 & , |t| > 2 \end{cases}.$$

Außerdem ist (vgl. Beweisskizze in 26.5):

$$\mathcal{F}f(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin\omega}{\omega} & , \omega \neq 0 \\ 2 & , \omega = 0 \end{cases}.$$

Nach dem Satz ist somit $\mathcal{F}h(\omega) = \begin{cases} 4 \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} & , \omega \neq 0 \\ 4 & , \omega = 0 \end{cases}$.

26.7 Dancing-Hat-Lemma: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) (\mathcal{F}g)(\eta) d\eta.$$

Der Name kommt daher, dass man statt $\mathcal{F}f$ auch \hat{f} (engl: “hat f ”) schreibt.

Beweis: Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} f(\eta) d\eta g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} g(\xi) d\xi f(\eta) d\eta.$$

26.8 Fourierinversionsformel: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass $\mathcal{F}f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \mathcal{F}f(\omega) d\omega.$$

Beweisskizze: Es reicht, die Formel für $t = 0$ zu zeigen (verwende die Verschiebungsregel 26.3(b)). Wir setzen $h(t) = e^{-t^2/2}$ und $g(t) = h(at)$, wobei $a > 0$. Dann gilt nach 26.3(a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\omega)h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\mathcal{F}g)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{a}(\mathcal{F}h)(t/a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\mathcal{F}h(t) dt.$$

Lässt man hier a gegen Null gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen $2\pi f(0)$ und die linke Seite konvergiert gegen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) d\omega$, wovon wir uns jetzt überzeugen.

Linke Seite: Es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\omega)h(a\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)| |h(a\omega) - 1| d\omega.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ so, dass $|h(x) - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle (anderen) $x \in \mathbb{R}$ hingegen gilt $|h(x) - 1| \leq 2$. Wir können dann weiter abschätzen (ähnlich wie im Beweis von 26.5):

$$= \int_{|\omega| \leq \delta/a} \dots + \int_{|\omega| \geq \delta/a} \dots \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\omega)| d\omega + 2 \underbrace{\int_{|\omega| > \delta/a} |(\mathcal{F}f)(\omega)| d\omega}_{\rightarrow 0, (h \rightarrow 0)}.$$

Rechte Seite: Zunächst gilt nach 26.4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2} dt = 2\pi.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Da f beschränkt ist, gibt es andererseits $M > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben nun

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(at)(\mathcal{F}h)(t) dt - 2\pi f(0) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(at) - f(0)| |(\mathcal{F}h)(t)| dt = \int_{|t| \leq \delta/a} \dots + \int_{|t| \geq \delta/a} \dots$$

und können wie oben verfahren.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man in 26.8 Stetigkeit und Beschränktheit von f nicht fordern muss. Diese Eigenschaften erhält man aus der Voraussetzung, dass $\mathcal{F}f$ absolut integrierbar ist.

Beispiele: (1) Sei $f(t) = \begin{cases} \frac{4 \sin^2 t}{t^2}, & t \neq 0 \\ 4, & t = 0 \end{cases}$. Dann gilt $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \begin{cases} 2\pi(2 - |\omega|), & |\omega| \leq 2 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$ (wende 26.8 auf das Beispiel in 26.6 an).

(2) Es gilt $\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\}(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$. (Wende 26.8 auf das Beispiel in 26.2 mit $a = 1$ an.)

Bemerkung (Zusammenhang von 26.8 und der komplexen Umkehrformel für die Laplace-Transformation): Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$. Für $c > \gamma$ ist dann $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = e^{-ct} f(t)$ stückweise stetig und absolut integrierbar, und es gilt

$$\mathcal{F}g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(c+i\omega)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(c+i\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ist nun $\mathcal{F}g$ wieder absolut integrierbar (dann ist g und damit auch f stetig), so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} (\mathcal{F}g)(\omega) d\omega.$$

Also ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+i\omega)t} \mathcal{L}\{f\}(c+i\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\rho_A} e^{st} \mathcal{L}\{f\}(s) ds,$$

wobei $\rho_A : [-A, A] \rightarrow \mathbb{C}$, $\rho_A(\omega) = c + i\omega$ (beachte $\rho'_A(\omega) = i$).

26.9 Satz von Plancherel: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega.$$

Beweisidee: Ist zusätzlich $\mathcal{F}f$ absolut integrierbar, so verwende man 26.7 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) \overline{\mathcal{F}f(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}f(\omega)}\}(t) dt.$$

Dann beachte man

$$\overline{\mathcal{F}f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \overline{f(t)} dt = (\mathcal{F}\overline{f})(-\omega)$$

und (unter Verwendung von 26.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} (\mathcal{F}\overline{f})(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} (\mathcal{F}\overline{f})(\omega) d\omega = 2\pi \overline{f(t)}.$$

Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument.

Ende
Woche 14