Aufgabe 1) Es sei y Lösung. Berechne zunächst y' in Abhängigkeit von y : $\underline{y' = p(y)}$

1. Gesucht ist $p = p(t)$ mit $2\dot{p}(t)p(t) + p^2(t) = t$

$$\underline{(p^2)^{\cdot}(t) + p^2(t) = t}$$

Mit $h(t) = p^2(t)$: $\dot{h}(t) + h(t) = t$

(mit Hinweis) $\Rightarrow$ $h(t) = \underline{p^2(t) = t - 1 + ce^{-t}}$, c konst

$$\Rightarrow \underline{(y')^2(x)} = p^2(y(x)) = \underline{y(x) - 1 + ce^{-y(x)}}$$

2. Hieraus ist $y = y(x)$ zu berechnen.

Mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ folgt $0 = ce^{-1} \Rightarrow c = 0$,

sodass $y = y(x)$ aus

$\underline{(y')^2(x) = y(x) - 1}$ zu berechnen ist.

$\Rightarrow y(x) \geq 1 \Rightarrow y'(x) = \pm\sqrt{y(x) - 1}$

$\Rightarrow 2\sqrt{y(x) - 1} = \pm(x + c_1)$ c_1 konstant

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 0$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1}$$

HMIII Herbst 2012 Lösungen

Aufgabe 2) a) Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Man erhält:

$$y(x) = -2a_0 - 2a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \quad 2x^2 y'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} 2a_{k-1} x^k, \quad x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^k$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$a_0 + a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_k (k+1)(k+2) + 2a_{k-1} (k-1) \right] x^k = 0$$

Koeffvergleich

$\Rightarrow$ Rekursionsformel für die a_k:

(R) $\quad a_0 = 0, a_1 = 0 \; ; \; a_k (k+1)(k-2) = -2(k-1) a_{k-1}$

$k = 2, 3, \ldots$

b) $a_0 = a_1 = 0$

Setze in (R) $k = 2$: $a_2 \cdot 0 = -2 \cdot 0$

$\Rightarrow$ a_2 ist beliebig

(R) $\Rightarrow \quad a_k = \dfrac{-2(k-1)}{(k+1)(k-2)} a_{k-1}, \quad k = 3, 4, \ldots$

also: $a_3 = -a_2$

$$a_4 = -2 \frac{3}{5 \cdot 2} a_3 = \frac{3}{5} a_2$$

c) Konvergenzradius $= \lim_{k \to \infty} \left| \dfrac{a_{k-1}}{a_k} \right| \underset{(R)}{=} \infty$

Aufgabe 3

$$y' = v \Rightarrow \underline{v'' + 2v' + v = x + 2e^{-x}} \quad (*)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit dem Ansatz

$$v(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{v_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}} \quad (**)$$

partikuläre Lösung für (*):

v_{p_1}: $v'' + 2v' + v = x$ Ansatz $v(x) = ax + b$

$$\Rightarrow \underline{v_{p_1}(x) = x - 2}$$

v_{p_2}: $v'' + 2v' + v = 2e^{-x}$ Ansatz: $v(x) = ax^2 e^{-x}$

(wegen (**))

$$\Rightarrow \underline{v_{p_2}(x) = x^2 e^{-x}}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung von (*):

$$\underline{v(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x - 2 + x^2 e^{-x}} = y'(x)$$

Mit den Hinweisen erhält man die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung:

$$\underline{y(x) = d_1 e^{-x} + d_2 x e^{-x} - x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + d_3}$$

Hier sind d_1, d_2, d_3 beliebige Konstanten

HHU Herbst 2012 Lösungen

Aufgabe 4)

1. gesucht sind 3 l.u. Lösungen $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ von $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$, mit $Y(t) = [\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \vec{y}_3(t)]$ ist dann $\exp(tA) = Y(t)Y(0)^{-1}$.

2. Die Lösung des AWP ist $\vec{y}(t) = \exp(tA)\vec{y}(0)$.

---

zu 1.: EW und EV von A

$$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2}$$

$$\text{EV zu } \lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{(*)}$ Ist $\vec{v}$ EV zu λ, so ist $e^{tA}\vec{v} = e^{\lambda t}\vec{v}$ Lösung:

$$\text{also: } \underline{\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}}$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{(*)} \Rightarrow \underline{\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

Eine weitere Lösung erhält man mit dem Ansatz

$$\vec{y}_3(t) = e^{2t}(\vec{a} + \vec{b}t)$$

Einsetzen in die Dgl und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\overline{(**)} \quad (A-2E)\vec{a} = \vec{b}$$

$$(A-2E)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\text{siehe oben})\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{(**)} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und somit: } \underline{\vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

noch Aufgabe 4

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} & te^{2t} \\ e^{t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(1.)}{\Longrightarrow} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t}(1+t) & e^{t}-te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

---

zu 2. Die Lösung des AWP ist:

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 1+4t \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t}$$
