

MITSCHRIEB ZU HÖHERE MATHEMATIK III:
FACHRICHTUNGEN PHYSIK,
ELEKTROINGENIEURWESEN UND GEODÄSIE

Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer

Vorlesung Wintersemester 2002/2003

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung HÖHERE MATHEMATIK III
von Herrn Dr. MÜLLER-RETTKOWSKI und Diplomphysiker Jochen Bitzer im Wintersemester 2002/2003
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	5
1.1	Komplexe Zahlen	5
1.1.1	Polardarstellung	6
1.2	Exponentialfunktion	6
1.3	Die trigonometrischen Funktionen	7
2	Komplexe Funktionen	9
2.1	Differenzierbarkeit im Komplexen	11
2.2	Umkehrfunktion/Der komplexe Logarithmus/Wurzeln	15
2.2.1	Komplexer Logarithmus	16
2.3	Der komplexe Logarithmus	16
2.4	Konforme Abbildungen: MÖBIUstransformationen	19
2.4.1	MÖBIUstransformationen (gebrochen lineare Funktionen)	25
2.4.2	Spiegelung am Kreis	27
3	Komplexe Kurvenintegrale	31
3.1	Einleitung	31
3.2	Sätze über komplexe Kurvenintegrale	33
4	Potenzreihenentwicklungen, Taylorreihe	41
4.1	LAURENT-Reihe	41
4.2	Isolierte Singularität und Residuensatz	46
4.3	Auswertung (reeller uneigentlicher) Integrale	50
4.3.1	Linienintegrale mit Residuensatz	50
4.3.2	Uneigentliche Integrale mit Residuensatz	51
5	Differentialgleichungen	55
5.1	Implizite Differentialgleichung 1.Ordnung	55
5.2	Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor	59
5.3	Der integrierende Faktor	61
5.4	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	64
5.4.1	Beschreibung der Lösung	65
5.4.2	Wronski-Matrix/Wronski-Determinante	66
5.5	Lösen des Problems $A(f; \alpha, \beta)$	68
5.6	Potenzreihenansatz	71

Kapitel 1

Wiederholung

1.1 Komplexe Zahlen

Wir werden uns mit folgenden Dingen auseinandersetzen:

- * Argument
- * Exponentialfunktion
- * Trigonometrische Funktionen



$$z \in \mathbb{C}, z = x + iy$$

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow z = x + iy \quad (\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C})$$

Zu einer komplexen Zahl gehört die konjugiert komplexe Zahl:

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

Weiterhin gilt durch Kombination dieser Formeln:

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Für den Betrag einer komplexen Zahl erhält man nach Pythagoras:

$$|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = z\bar{z}$$

Des Weiteren gilt die Dreiecksungleichung:

$$z, w \in \mathbb{C} : ||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

1.1.1 Polardarstellung

$$z = r \cos \varphi + i \sin \varphi, r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$r = |z|$$

Durch $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ wird eindeutig eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Umkehrabbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto r > 0, \varphi$ ist jedoch nicht eindeutig, was an der Periodizität der Winkelfunktionen \sin und \cos liegt. Der Winkel φ wäre nämlich nicht eindeutig bestimmt. Man kann aus dieser Abbildung jedoch eine eindeutige Abbildung machen, indem wir das Intervall, in dem sich φ befinden darf, folgendermaßen festlegt:

$$z : \mathbb{C} \mapsto \arg(z) \in [0, 2\pi] \text{ oder } (-\pi, +\pi]$$

$$1.) \varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$2.) \varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), -\pi < \varphi \leq \pi$$

Dies ist dann der Hauptzweig des Argumentes. Somit gilt nun:

$$1.) \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$2.) \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \alpha < \varphi \leq \alpha + 2\pi$$

$$\alpha = 0, \alpha = -\pi$$

1.2 Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

An dieser Stelle sollte man noch einmal folgende Begriffe nachschlagen:

- * Konvergenzradius
- * Absolute Konvergenz
- * Gleichmäßige Konvergenz

Der Konvergenzradius für diese Reihe ist ∞ . Deshalb konvergiert sie für alle z . Weiterhin gilt:

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$$

Mit dem CAUCHY-Produkt kann man beispielsweise folgende Formeln herleiten:

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w); z, w \in \mathbb{C}$$

Diese Beziehung heißt Additionstheorem für die Exponentialfunktion. Darüberhinaus gilt:

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$$

Durch Betrachtung der Reihe erhält man:

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \Rightarrow \operatorname{Re}(\exp(z)) = \frac{1}{2} (\exp(z) + \exp(-z))$$

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re}(z)) = (\exp(\operatorname{Re}(z)))^2$$

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)} : z = x + iy : |e^z| = e^x$$

$$z = x + iy, e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow |e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x |e^{iy}|$$

$$y \in \mathbb{R} : |e^{iy}| = 1 (|e^{iz}| \neq 1)$$

1.3 Die trigonometrischen Funktionen

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k z^{2k}, \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k z^{2k+1}, z \in \mathbb{C}$$

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), z \in \mathbb{C}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$z = y \in \mathbb{R} :$$

$$\cos(y) = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) = \operatorname{Re} (e^{iy})$$

$$\sin(y) = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) = \operatorname{Im} (e^{iy})$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = |e^z| |\cos(\arg(e^z)) + i \sin(\arg(e^z))|$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$|\operatorname{Re}(z - z_0)|^2 \leq |z - z_0|^2 = (\operatorname{Re}(z - z_0))^2 + (\operatorname{Im}(z - z_0))^2 = (\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0))^2 + (\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0))^2$$

$$z \mapsto z_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \mapsto \operatorname{Re}(z_0) \text{ und } \operatorname{Im}(z) \mapsto \operatorname{Im}(z_0)$$

Wir können folglich bei Konvergenzfragen von komplexen Funktionen immer ins Reelle übergehen.

Kapitel 2

Komplexe Funktionen

$$w = f(z), f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$

G ist ein Gebiet. Ein Gebiet hat die Eigenschaft, offen und zusammenhängend sein.

$$e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$$

$$\operatorname{Re}(e^{x+iy}) = e^x \cos(y)$$

$$\operatorname{Im}(e^{x+iy}) = e^x \sin(y)$$

$$\operatorname{Re}f(x+iy) = u(x, y)$$

$$\operatorname{Im}f(x+iy) = v(x, y)$$

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Beispiel:

$$w = \sin(z)$$

$$|\sin(x)| \leq 1$$

Gesucht sei:

$$\operatorname{Re}(\sin(x+iy)) = u(x, y)$$

$$\operatorname{Im}(\sin(x+iy)) = v(x, y)$$

Wir wenden das Additionstheorem an:

$$\begin{aligned} \sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\frac{1}{2}(e^{i^2y} + e^{-i^2y}) + \cos(x)\frac{1}{2i}(e^{i^2y} - e^{-i^2y}) = \\ &= \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos(x)\sinh(y)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

Veranschaulichen lässt sich dies durch $w = f(z)$.

Beispiel:

$$f(z) = e^z, G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$$

Durch dieses Gebiet wird ein Streifen in der komplexen Ebene dargestellt.

$$y_0 \in (0, \pi)$$

$$z(t) = \{t + iy_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$e^{z(t)} = e^t e^{iy_0}$$

Wir bewegen uns mit steigendem t auf einer Halbgerade von 0 nach ∞ .

$$z(t) = \{x_0 + it \mid \alpha \leq t \leq 2\pi\}$$

Es handelt sich um einen Kreis in der komplexen Ebene.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$, $z_0 \in G$. f heißt in $z_0 \in G$ stetig, falls $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ oder falls die Funktion $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ in (x_0, y_0) ($z_0 = x_0 + iy_0$) stetig sind. Falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß aus $z \in G$ und $|z - z_0| < \delta_\varepsilon$, folgt $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.



Beispiel:

$$f(z) = z^2, u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

$$f : G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$w = f(z) = z + \frac{1}{z}, G = \{z | \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

Nun erhält man durch Umformung:

$$w = f(z) = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$f(x + iy) = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

Beispiel zur Stetigkeit:

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}}, z \neq 0$$

Die Frage ist nun, ob f nach $z = 0$ stetig fortgesetzt werden kann.

$$z = re^{i\varphi}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = ?$$

$$f(z) = re^{i\varphi} re^{-i\varphi} = e^{2i\varphi}$$

Wir suchen uns Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden der komplexen Ebene:

$$z_n = \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Eine andere Folge von Punkten ist:

$$z_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$$

Nähert man sich auf zwei verschiedenen Wegen der Null an, so sind die Grenzwerte unterschiedlich. Daraus folgt, daß die Funktion $f(z)$ nicht stetig sein kann.

2.1 Differenzierbarkeit im Komplexen

Definition:

Es sei $f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$. f heißt in $z_0 \in G$ differenzierbar, falls $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert. Dann heißt der Grenzwert die **Ableitung von f an der Stelle z_0** und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. f heißt in z_0 **holomorph**, falls f in einer Umgebung von z_0 differenzierbar ist. Eine Funktion ist in einem Gebiet holomorph, wenn sie in jedem Punkt holomorph ist.

Satz ①:

f ist in z_0 differenzierbar genau dann, wenn es ein $A \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
 $f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0)$, $z \mapsto z_0$
 In diesem Fall ist $A = f'(z_0)$.

Beweis:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \Leftrightarrow f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(z - z_0)$$

Es gelten wie im Reellen alle Differentiationsregeln wie beispielsweise Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, **Differenzieren von Potenzreihen**. Wir schauen uns eine komplexe Potenzreihe an:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, |z - z_0| < R : R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right)$$

$f'(z)$ existiert für alle z mit $z - z_0 < R$, und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Das ist nun wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzbereich. Die Potenzreihe ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung kann man berechnen, indem man gliedweise differenziert.

Es sei $f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Wir stellen uns nun die Frage, was die Differentiation von f für u und v bedeutet.

Definition:

- 1.) f heißt **reell** differenzierbar, wenn u, v differenzierbar sind.
- 2.) $(\partial_x f)(x + iy) = D_1 u(x, y) + i D_2 v(x, y)$
 $(\partial_y f)(x + iy) = D_2 u(x, y) + i D_1 v(x, y)$

u, v sind differenzierbar in (x_0, y_0) ($z_0 = x_0 + iy_0$):

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (D_1 u)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 u)(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|) \quad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (D_1 v)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 v)(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|) \quad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

Nun schreiben wir die zweite Zeile komplex:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (D_1 u)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 u)(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|) \quad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

$$iv(x, y) = iv(x_0, y_0) + i(D_1 v)(x_0, y_0)(x - x_0) + i(D_2 v)(x_0, y_0)(y - y_0) + io(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|) \quad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

Durch Addition folgt nun:

$$f(x + iy) = f(x_0 + iy_0) + (\partial_x f)(x_0 + iy_0)(x - x_0) + (\partial_y f)(x_0 + iy_0)(y - y_0)$$

Wir setzen folgendes ein:

$$z = x + iy, x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$z_0 = x_0 + iy_0, y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Daraus folgt:

f ist in z_0 reell differenzierbar.

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) - i\partial_y f(z_0))(z - z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0))(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|), z \mapsto z_0$$

Satz ②:

Es ist $w = f(z)$ in G holomorph. $\Leftrightarrow f$ ist reell differenzierbar in G und es gilt:
 $\partial_x f(z) + i\partial_y f(z) = 0 \quad \forall z \in G$ (\star)

Was bedeutet jedoch (\star):

$$D_1 u(x, y) + iD_1 v(x, y) = -iD_2 u(x, y) + D_2 v(x, y)$$

$$\Leftrightarrow D_1 u(x, y) = D_2 v(x, y)$$

$$\Leftrightarrow D_1 v(x, y) = -D_2 u(x, y)$$

Oder wie man in manch anderen Büchern findet:

$$u_x = v_y$$

$$v_x = -u_y$$

Dies sind die sogenannten **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**.

Satz ② (andere Formulierung):

$w = f(z)$ ist in G holomorph, falls das Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ differenzierbar ist und die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen in G erfüllt sind.

Beispiel:

$$f(z) = \bar{z}$$

$$u(x, y) = x, v(x, y) = -y$$

Eingesetzt in die CAUCHY-RIEMANNschen-Differentialgleichungen ergibt:

$$D_1 u = 1 \neq D_2 v = -1$$

Die Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Daraus folgt, daß die Funktion **nirgends** holomorph ist.

Beispiel:

$$f(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$f(z) = \frac{|z|^2}{\bar{z}} = z$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

Bemerkungen:

$$f(z) = f(z_0) + \overbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) - i\partial_y f(z_0))(z - z_0)}^{f'(z_0)} + \overbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0))(\bar{z} - \bar{z}_0)}^0 + o(|z - z_0|), z \mapsto z_0$$

1.) Ist f in z holomorph, so hat man:

$$\begin{aligned} f'(z) = f'(x + iy) &= \frac{1}{2} \left(D_1 u(x, y) + \underbrace{iD_1 v}_{-iD_2 u} - iD_2 u + \underbrace{D_2 v}_{D_1 u} \right) = \\ &= D_1 u(x, y) - iD_2 u(x, y) = \\ &= D_1 u(x, y) + iD_1 v(x, y) = \\ &= D_2 v(x, y) + iD_1 v(x, y) = \\ &= D_2 v(x, y) - iD_2 u(x, y) \end{aligned}$$

$$|f(x + iy)|^2 = u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = v_y^2 + u_y^2$$

$$f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \text{const.}$$

2.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ Die Ableitung dieser Funktion ist eine (2,2)-Matrix:

$$\vec{w}'(u, v) = \begin{pmatrix} D_1 u & D_2 u \\ D_1 v & D_2 v \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} D_1 u & D_2 u \\ -D_2 u & D_1 u \end{pmatrix} (x, y)$$

Wir berechnen die Determinante:

$$\det \vec{w}'(x, y) = |f'(x + iy)|^2$$

Ist diese Funktionaldeterminante ungleich 0, so ist \vec{w} lokal injektiv.

$$\det \vec{w}'(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in G \Rightarrow \begin{pmatrix} u(x, y) = a \\ v(x, y) = b \end{pmatrix}$$

3.) Es gilt: $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$

$$D_1 u(x, y)D_1 v(x, y) + D_2 u(x, y)D_2 v(x, y) = D_1 u(x, y)(-D_2 u(x, y)) + D_2 u(x, y)D_1 u(x, y) = 0$$

Interpretation:

$c, a = \text{const.}$

$$\left. \begin{matrix} u(x, y) = c \\ v(x, y) = a \end{matrix} \right\} \text{Diese Linien stehen senkrecht aufeinander.}$$

Beispiel:

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$x^2 - y^2 = u_0$$

$$2xy = v_0$$

Diese stehen senkrecht aufeinander.

Beispiel:

Wir wollen zeigen, daß $f(z) = e^{-z^2}$ holomorph in \mathbb{C} ist.

$$f(x + iy) = e^{-(x^2 - y^2 + 2ixy)} = \underbrace{e^{-(x^2 - y^2)} \cos 2xy}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(e^{-(x^2 - y^2)} \sin 2xy \right)}_{v(x,y)}$$

Die CAUCHY-RIEMANSchen Differentialgleichungen sind erfüllt. u, v heißen **harmonisch**. Weiterhin muß gelten.

$$\Delta u(x, y) = \Delta v(x, y) = 0$$

Δ ist der Laplace-Operator mit $\Delta = \nabla \cdot \nabla$.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$D_1^2 u(x, y) + D_2^2 u(x, y) = D_1^2 v(x, y) + D_2^2 v(x, y) = 0$$

Als Übung kann man zeigen, daß man u, v beliebig oft differenzieren kann. Das heißt:

Mit f sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.

Zunächst ohne Beweis:

Ist f einmal differenzierbar, so ist f beliebig oft differenzierbar. u, v sind beliebig oft stetig partiell differenzierbar, insbesondere gelte:

$$D_1 D_2 u(x, y) = D_2 D_1 u(x, y)$$

Satz:

Ist $w = f(z)$, $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$ in G holomorph, so sind u und v in G harmonisch.

$$D_1 D_1 u = D_1 D_2 v, D_1 D_2 u = -D_1 D_1 v \Rightarrow \Delta v = 0$$

$$D_2 D_1 u = D_2 D_2 v, D_2 D_2 u = -D_2 D_1 v \Rightarrow \Delta u = 0$$

Für den ladungsfreien Raum:

$$\Delta \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Delta \times \vec{E} = \vec{\sigma} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

φ ist das Potential.

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\Delta \varphi$$

Es gibt eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f(x + iy) = \varphi(x, y)$.

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + iv(x, y)$$

$\varphi(x, y) = c$ sind die Äquipotentiallinien senkrecht zu $v(x, y) = \tilde{c}$.

Beispiel:

Ist $f(z) = e^{-z^2}$ holomorph in \mathbb{C} ?

Satz ④:

Ist $u = u(x, y)$ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet G harmonisch, so gibt es eine in G harmonische Funktion $v = v(x, y)$ derart, daß $w = f(z)$ mit $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist in G holomorph. $u(x, y)$ ist gegeben und $v(x, y)$ ist gesucht. Ist $v = v(x, y)$ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet G harmonisch, so gibt es eine in G harmonische Funktion $u = u(x, y)$ derart, daß $w = f(z)$ mit $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist in G holomorph. $u(x, y)$ ist gegeben und $v(x, y)$ ist gesucht.

Beweis:

$$D_1 v = -D_2 u$$

$$D_2 v = D_1 u$$

$$\nabla v = \begin{pmatrix} -D_2 u \\ D_1 u \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lösbar}} D_2(-D_2 u) = D_1^2 u \Rightarrow \Delta u = 0$$

Beispiel:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - y$$

Gibt es eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$? Wir überprüfen:

$$\nabla u = 2 + (-2) = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt. Folglich gibt es so eine Funktion, die wir nun bestimmen wollen. Mit den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen folgt:

$$D_1 v = 2y + 1 \Rightarrow v(x, y) = 2xy + x + c(y)$$

$$D_2 v = 2x$$

Mit der ersten Beziehung folgt:

$$D_2 v(x, y) = 2x + c'(y) \Rightarrow c(y) = \lambda \in \mathbb{R} : v(x, y) = 2xy + x + \lambda$$

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + \lambda) \Rightarrow f(z) = z^2 + iz + i\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Setze:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

2.2 Umkehrfunktion/Der komplexe Logarithmus/Wurzeln

Definition:

$f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ist **injektiv**, falls aus $z_1 \neq z_2$ folgt $f(z_1) \neq f(z_2)$. Aus $f(z_1) = f(z_2)$ folgt $z_1 = z_2$.

Definition:

Ist $f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorph und injektiv, so heißt f **schlicht**.

Beispiel:

$$f(z) = z^2$$

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Hier liegt keine Injektivität vor. $f(z) = z^2$ ist aber auf $G = \{z \mid 0 < \arg(z) < \pi\}$ injektiv.

Satz ① (ohne Beweis):

$w = f(z)$, $z \in G$ sei schlicht auf G . Dann ist $f(G)$ ein Gebiet. Die Umkehrfunktion $g : f(G) \mapsto G$ ist schlicht und es gilt:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \text{ mit } w \in f(G)$$

Ist f in G schlicht, so gilt $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$.

$$e^{w_1} = e^{w_2} \Leftrightarrow w_1 = w_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$z = \exp(w)$ ist auf G_α schlicht, $\exp(G_\alpha) = E_\alpha$.

$$\log : E_\alpha \mapsto G_\alpha$$

2.2.1 Komplexer Logarithmus

$$\exp(\log z) = z$$

$$\log(\exp(w)) = w$$

$$e^w = z$$

$w \in G_\alpha$, $z \in E_\alpha$, z sei gegeben. Gesucht ist w mit $\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$.

$$w = u + iv$$

$$e^u e^{iv} = |z| e^{i \arg(z)}$$

$$e^u = |z| \Rightarrow u = \ln |z|$$

$f : G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **schlicht** (univalent), wenn f in G holomorph und injektiv ist.

Beispiel:

$f(z) = z^2$ ist injektiv auf $\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Bemerkung:

Aus $f'(z) \neq 0 \forall z \in G$ folgt **nicht**, daß f auf G injektiv ist.

2.3 Der komplexe Logarithmus

Es sei $E_\alpha = \{z \mid z \neq 0, \alpha < \log(z) < \alpha + 2\pi\}$ eine geschlitzte Ebene. Dann definieren wir die zu $z = \exp(w)$ gehörige Umkehrfunktion $w = \log(z)$.

Satz 2:

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird durch $\log_k(z) := \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$, $z \in E_\alpha$ ($z \neq 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$) eine schlichte Funktion definiert. Es gilt:

$$\log'_k(z) = \frac{1}{z} \text{ für } z \in E_\alpha \text{ und } \exp(\log_k(z)) = z, z \in E_\alpha$$

Man nennt die Funktion **k -ter Zweig des Logarithmus**. Für $k = 0$ heißt $\log_0(z)$ der **Hauptzweig** des Logarithmus für $\alpha = \pi$ (oder $\alpha = 0$). Das Bild von E_α unter \log_k ist $\{w | \alpha + 2k\pi < \operatorname{Im}(w) < \alpha + (2k+1)\pi\}$.

Beispiel:

Wenn man den Logarithmus einer Zahl berechnen will, bekommt man also nicht einen bestimmten Wert, sondern eine ganze Menge von Werten:

$$\log(i) = \left\{ z | z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Deshalb ist der Hauptwert definiert:

$$\log_0(i) = i\frac{\pi}{2}$$

Man kann jetzt auch den Logarithmus einer negativen Zahl berechnen, was im Reellen nicht möglich war:

$$\log(-1) = \{z | z = i\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\log(1) = \{z | z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Nimmt man hier den Hauptwert des komplexen Logarithmus, so erhält man gerade den Logarithmus im Reellen.

Beispiel:

Es soll $\{z | \operatorname{Re}(z) < 0\}$ durch eine Logarithmusfunktion schlicht abgebildet werden. Man erhält dabei einen Streifen von $\frac{\pi}{2}i$ bis $\frac{5\pi}{2}i$.

Beispiel:

Wir berechnen die Stammfunktion von $f(x)$ mit den Mitteln der Funktionentheorie:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Durch komplexe Partialbruchzerlegung folgt:

$$f(x) = \frac{1}{(t+i)(t-i)} = \frac{A}{t+i} + \frac{B}{t-i}$$

Mittels der Zuhaltmethode gewinnt man A und B :

$$A = -\frac{1}{2i}$$

$$B = \frac{1}{2i}$$


Also folgt damit:

$$f(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right)$$

Durch Integration erhalten wir:

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right) = \frac{1}{2i} [\ln(1+it) - \ln(1-it)]$$

Wir erhalten nun mit der Definition des komplexen Logarithmus:

 $\ln(1+it) = \ln|1+it| + i \arg(1+it) = 1 + t^2 + i \arctan\left(\frac{t}{1}\right) = 1 + t^2 + i \arctan(t)$

$$\ln(1-it) = \ln|1-it| + i \arg(1-it) = 1 + t^2 + i \arctan\left(-\frac{t}{1}\right) = 1 + t^2 - i \arctan(t)$$

Somit gilt also schlußendlich:

$$F(x) = \frac{1}{2i} ((1 + t^2 + i \arctan(t)) - (1 + t^2 - i \arctan(t))) = \frac{1}{2i} \cdot 2i \arctan(t) = \boxed{\arctan(t)}$$

Damit folgt also das aus der reellen Analysis schon bekannte Ergebnis.

Übung:

$$G = \left\{ z \mid \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}, 1 < |z| < e \right\}$$

Diese Menge ist abzubilden mit Logarithmusfunktion, für die $k = 1$ zu wählen ist.

$$w = \log_1(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi)$$

Definition:

Es sei $z \neq 0, a \in \mathbb{C}$. Dann ist $z^a = e^{a \log(z)}$ definiert, wenn der Logarithmus definiert ist.

Beispiel:

$$a = \frac{1}{n} : z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i \arg(z) + i2k\pi)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}$$

Das sind n verschiedene komplexe Zahlen, die man für $k = 0, 1, 2, n - 1$ erhält. Die Beziehung ist nichts anderes als die Formel von MOIVRE, die wir schon kennengelernt haben. Die Punkte $\sqrt[n]{z}$ bilden die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$. Für $n = 2$ gilt beispielsweise:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}} e^{ik\pi}$$

$$(\sqrt{z})_0 : E_0 \Rightarrow \{w | \text{Im}(z) > 0\}$$

$$(\sqrt{z})_1 : E_0 \Rightarrow \{w | \text{Im}(z) < 0\}$$

Warnung:

Im Reellen gelten folgende Rechenregeln:

- * $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- * $(a^b)^c = a^{bc}$
- * $\log a^b = b \log(a)$

Diese Regeln sind jedoch im **Komplexen** im allgemeinen **falsch!**

Beispiel:

$$\log(i(-1+i)) \stackrel{?}{=} \log i + \log(-1+i)$$

Wir betrachten \log in $E_{-\pi}$ und $k = 0$:

$$\log(-i-1) = \ln \sqrt{2} + i \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Nun berechnen wir die rechte Seite der Gleichung:

$$\log i = i \frac{\pi}{2}$$

$$\log(-1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4}$$

Die beiden Seiten sind nicht gleich, also gilt die erste Rechenregel nicht.

Übung:

Überprüfe folgendes:

$$\log(-1) = \frac{1}{2} \log(-1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \log(-1)^4$$

2.4 Konforme Abbildungen: Möbiustransformationen

Folgende Begriffe wollen wir behandeln:

- * $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- * Der Punkt „ ∞ “
- * Inversion
- * Verallgemeinerte Kreise

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$\mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei schlicht.

$$\{z | 0 < |z| < 1\} \mapsto \{w | 1 < w < \infty\}$$

$$\{z | 1 < |z| < \infty\} \mapsto \{w | 0 < |w| < \infty\}$$

$$\{z | |z| = 1\} \mapsto \{w | |w| = 1\}$$

Definition:

Es sei $f(0) := \infty \left(= \frac{1}{0}\right)$, $f(\infty) = 0$, $\left(= \frac{1}{\infty}\right)$. Hiermit wird $f(z) = \frac{1}{z}$ definiert $\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $f(z)$ hat in ∞ die Eigenschaft E , falls $f\left(\frac{1}{z}\right)$ diese Eigenschaft für $z = 0$ hat.

Beispiel:

Ist $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z = \infty$ differenzierbar? Betrachte $g(z) = \sin z$ in $z = 0$. Dort ist $\sin(z)$ differenzierbar.

Beispiel:

Die reelle und die imaginäre Achse schneiden sich in Unendlichen unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

- Reelle Achse $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Reelle Achse
- Imaginäre Achse $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Imaginäre Achse

Beispiel:

Wir wollen zeigen, daß $f(z) = \frac{1}{z} : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ holomorph ist.

$$z = 0 : f(0) = \infty; h(z) = \frac{1}{f(z)} = z \Rightarrow h'(z) = 1, h'(0) = 1$$

$$z = \infty : f(\infty) = 0; g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z \Rightarrow g'(z) = 1, g'(\infty) = 1$$

Also ist die Funktion holomorph.

Satz:

$f(z) = \frac{1}{z}$ bildet Kreise oder Geraden auf Kreise oder Geraden ab.

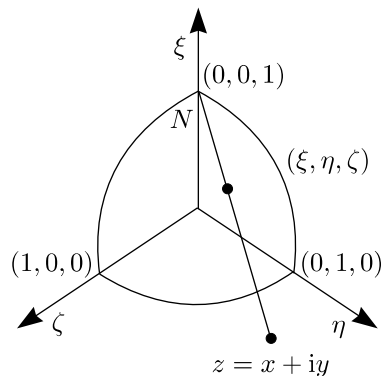
Beweis:

Ersetze in der allgemeinen Kreis-Geraden-Gleichung $\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}z + \gamma = 0$ die Variable z durch $\frac{1}{z}$. Man erhält somit durch Multiplikation mit $|z|^2$:

$$\gamma|z|^2 + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \alpha = 0$$

Es handelt sich dabei also wieder um eine Gerade oder einen Kreis. Wir betrachten nun:

$$\sum = \{(\xi, \eta, \zeta) | \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$



$$(\xi, \eta, \zeta) \in \sum \xrightarrow{\text{bijektiv}} z + \frac{\xi}{1-\zeta} + i \frac{\eta}{1-\zeta} \quad (\xi, \eta, \zeta) \neq (0, 0, 1)$$

Folgende Abbildung nennt man **Stereographische Projektion:**

$$\hat{\mathbb{C}} \mapsto \sum$$

$$z \mapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, -i \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad (*)$$

Problem:

Es sei die Abbildung $z \in \hat{\mathbb{C}} \mapsto \frac{1}{z}$ gegeben. Was bedeutet diese auf der Kugel? Dazu ersetze man in (\star) z durch $\frac{1}{z}$. Man erhält:

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, -\zeta)$$

Wir schreiben dies in einer Verkettung von Abbildungen:

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, -\zeta)$$

Bei der ersten Abbildung handelt es sich um eine Spiegelung an der (ξ, ζ) -Ebene. Die zweite Abbildung ist eine Spiegelung an der (ξ, η) -Ebene. Auf der Kugel gehen somit durch die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ Kreise über in Kreise. Nun gilt:

$$\{\text{Kreise, Geraden aus } \hat{\mathbb{C}}\} \xrightarrow{\text{Stereographische Projektion}} \{\text{Kreise auf der Kugel}\}$$

Beweis:

Die Gleichung eines verallgemeinerten Kreises lautet:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2$$

Somit folgt:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \mapsto 2\beta_1\xi - 2\beta_2\eta + (\alpha - \gamma)\zeta = -\alpha - \gamma$$

Es handelt sich hier um eine Ebenengleichung. Schnitt mit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ergibt einen Kreis. Der Kreis geht durch N , falls:

$$\alpha - \gamma = -\alpha - \gamma \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Kreis geht nicht durch } N \xrightarrow{\alpha \neq 0} \text{Kreis in } \hat{\mathbb{C}}$$

Ergebnisse:

Kreise und Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel zu Kreisen. Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel Kreise, die nicht durch N gehen. Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel Kreise durch N . ∞ liegt auf jeder Geraden und auf keinen Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$.

Satz 9:

Es sei $a \neq 0, a \in \mathbb{C}$. Die Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}: z \mapsto z + a$ (Translation) und $z \mapsto az$ (Drehstreckung) bilden Kreise in Kreise und Geraden in Geraden ab.

Beweis (für Drehstreckung):

Siehe: $az = |a||z|e^{i\varphi}e^{i\arg(z)}$

Satz ②:

Es sei $f(z) = \frac{1}{z}$. Diese Abbildung bildet verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise ab, d.h. genau:

- * Kreis durch 0 **geht über** in Gerade nicht durch 0.
- * Kreis nicht durch 0 **geht über** in Kreis nicht durch 0.
- * Gerade durch 0 **geht über** in Gerade durch 0.
- * Gerade nicht durch 0 **geht über** in Kreis durch 0.

Wir gehen nun über zu **konformen Abbildungen**.

Definition:

Es sei $f : G \subseteq \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$. f heißt in $z_0 \in G$ **konform**, falls f in z_0 holomorph und $f'(z_0) \neq 0$ gilt (in G konform, falls $f'(z) \neq 0 \forall z \in G$).

Bemerkungen:

- 1.) Eine in G schlichte Funktion ist in G konform.
- 2.) Eine in G konforme Funktion ist lokal schlicht.

Schlichtheit ist somit der Konformität übergeordnet. Was bedeutet aber Konformität geometrisch?

Gegeben sei $w = f(z)$, $z \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$.

$$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$$

$$z(t_0) = z_0$$

$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ ist die Tangentenkurve.

$$\dot{z}(t) \neq 0$$

Eine Kurve mit dieser Eigenschaft hatten wir in HMII als regulär bzw. glatt bezeichnet. Diese Kurve soll nun abgebildet werden wobei wir erhalten:

$$w(t) = f(z(t)), a \leq t \leq b$$

Mittels der Kettenregel folgt:

$$\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t)$$

$$\dot{w}(t_0) = f'(z(t_0))\dot{z}(t_0)$$

Für das Argument folgt:

$$\arg(\dot{w}(t)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}(t_0))$$

$\arg(\dot{z}(t_0))$ gibt die Richtung von γ in z_0 an; $\arg(\dot{w}(t_0))$ die Richtung des Bildes von γ in z_0 .

$$\sigma = \arg(\dot{z}_1(t_0)) - \arg(\dot{z}_2(t_0)) = \arg(\dot{w}_1(t_0)) - \arg(f'(z_0)) - (\arg(\dot{w}_2(t_0)) - \arg(f'(z_0))) = \arg(\dot{w}_1(t_0)) - \arg(\dot{w}_2(t_0))$$

Daraus folgt, daß der Winkel erhalten bleibt. Dies formulieren wir in einem Satz:

Satz ③:

Ist f in z_0 konform, so bleibt der Winkel zwischen Kurven in z_0 der Größe und dem Drehsinn auch erhalten.

Satz ④:

Jede holomorphe, nicht konstante Funktion bildet Gebiete auf Gebiete ab.

Nun folgt der zentrale Satz in diesem Kapitel, nämlich der **Riemannscher Abbildungssatz**:

Satz ⑤:

G, G^* seien einfach zusammenhängende (ohne Löcher) Gebiete, die mindestens zwei Randpunkte haben. Dann gibt es eine schlichte Funktion f mit $f(G) = G^*$.

Eine Abbildung, die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbildet, heißt **kreistreue**.

Beispiele für kreistreue Abbildungen:

* $z \mapsto z + a$

* $z \mapsto az$

* $z \mapsto \frac{1}{z}$

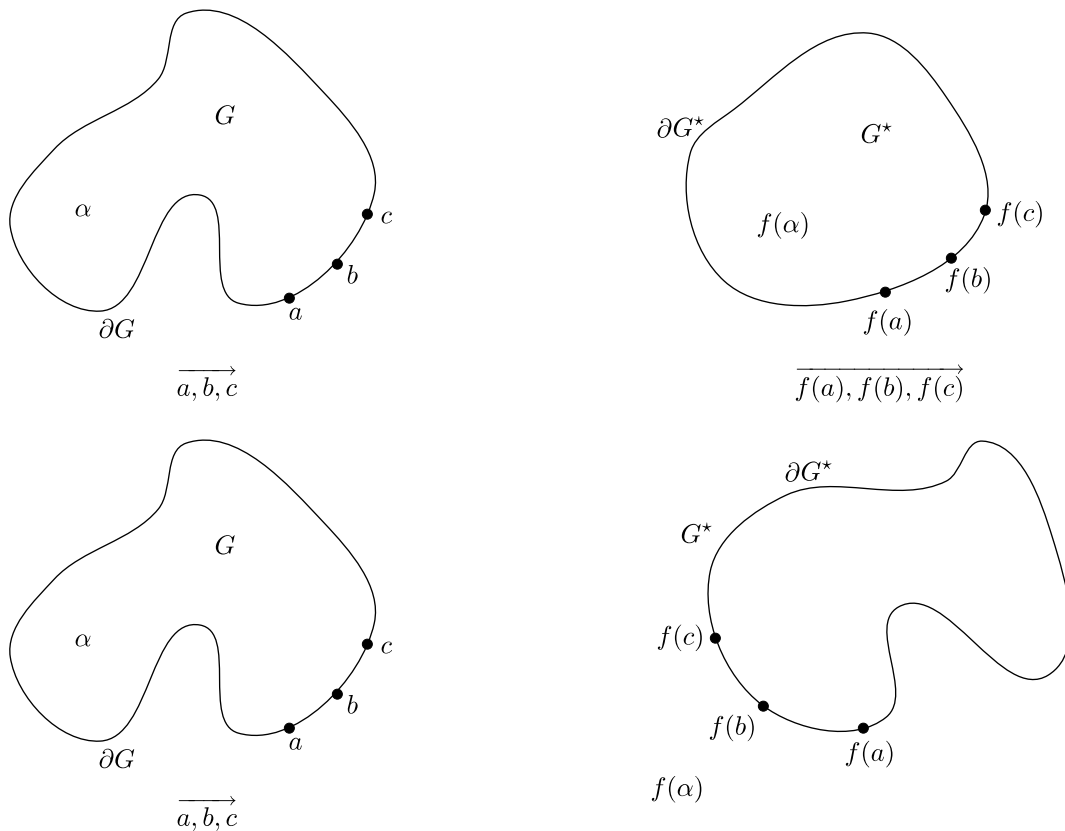
Satz ⑤ (Riemannscher Abbildungssatz):

G, G^* seien einfach zusammenhängende Gebiete mit jeweils mindestens zwei Raumpunkten. Dann gibt es eine schlichte Abbildung f von G auf G^* .

Satz ⑥:

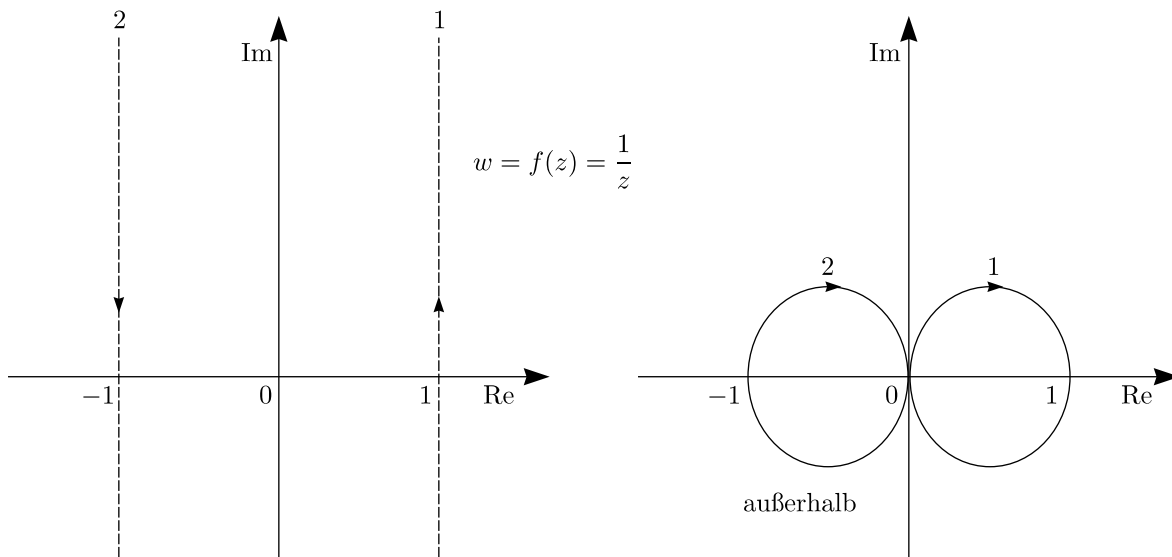
G, G^* seien zwei Gebiete, deren Ränder JORDANKurven sind, die sich nur aus endlich vielen Geraden oder Kreisstücken zusammensetzen. $w = f(z)$ bilde G schlicht auf G^* ab. Dann gelten:

- 1.) f ist auf $G \cup \partial G$ stetig.
- 2.) $f(\partial G) = \partial G^*$ (Rand \mapsto Rand). Diese Zuordnung $\partial G \mapsto \partial G^*$ ist injektiv und **orientierungstreu**.



„Liegt α links vom orientierten Rand ∂G , so liegt $f(\alpha)$ links vom orientierten Rand ∂G^* “.

Beispiel:



2.4.1 Möbiustransformationen (gebrochen lineare Funktionen)

Definition:

Es seien vier Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gegeben, für die gilt $ad - bc \neq 0$. Dann nennen wir die Abbildung $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ eine **Möbiustransformation**. M sei die Menge der MÖBIUSTRANSFORMATIONEN.

Wir differenzieren $T(z)$:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Durch die Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ wird somit ausgeschlossen, daß die Funktion konstant ist.

Definition:

Es sei $T \in M$, wobei $T: \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$.

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{für } z \neq \infty, z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

$$c \neq 0 : T(z) = \frac{1}{c} \left(\frac{bc - ad}{cz + d} + a \right) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(z) \text{ mit:}$$

* $T_1(z) = cz + d$

* $T_2(z) = \frac{1}{z}$

* $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c}z + \frac{a}{c}$

$T \in M$ ist somit kreistreu. Außerdem bildet (M, \circ) eine Gruppe:

1.) $S, T \in M \mapsto S \circ T \in M$

2.) $\text{id} \in M : T \circ \text{id} = \text{id} \circ T = T \forall T \in M$

$$\text{id}(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1}$$

3.) $S, T, U \in M: (T \circ S) \circ U = T \circ (S \circ U)$

4.) $T \in M \mapsto T^{-1} \in M: T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{id}$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

Satz ⑦:

$T \in M$. Dann ist die Abbildung $T : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ **schlicht**.

Beweis der Holomorphie:

$c \neq 0$:

* In $z = \infty$:

Betrachte $g(t) = T\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z = 0$:

$$g'(0) = \frac{bc - ad}{c^2}$$

* In $z = -\frac{d}{c}$

$$h(z) = \frac{1}{T(z)} \text{ für } z = -\frac{d}{c}$$

$$h'\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{c^2}{bc - ad}$$

Satz 8:

MÖBIUSTRANSFORMATIONEN sind kreistreu, d.h. genau für $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Eine Gerade durch $-\frac{d}{c}$ geht über in eine Gerade durch $\frac{a}{c}$. Eine Gerade nicht durch $-\frac{d}{c}$ geht über in einen Kreis durch $\frac{a}{c}$. Ein Kreis durch $-\frac{d}{c}$ wird abgebildet in eine Gerade nicht durch $\frac{a}{c}$. Aus einem Kreis nicht durch $-\frac{d}{c}$ wird ein Kreis, der nicht durch $\frac{a}{c}$ geht.

Satz 9:

$T \in M$ besitze mehr als 2 Fixpunkte. Dann gilt $T = \text{id}$.

Satz 10:

z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 seien Tripel paarweise verschiedener komplexer Zahlen aus $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gibt es **genau eine** MÖBIUSTRANSFORMATION T mit $T(z_j) = w_j$ mit $j = 1, 2, 3$.

Beweis:

$$T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$$T_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

$$T_1, T_2 \in M : T_1(z_1) = 0, T_1(z_2) = 1, T_1(z_3) = \infty$$

$$T = T_2^{-1} \circ T_1$$

$$T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(1) = w_2, j = 2$$

Es gibt nur diese MÖBIUSTRANSFORMATION: Angenommen, es gäbe $S \in M$ mit $S(z_j) = w_j$. Dann müssen wir beweisen, daß $S = T$ gilt.

$$S(z_j) = T(z_j), j = 1, 2, 3$$

$$\underbrace{S^{-1} \circ T(z_j)}_{\in M} = z : j, j = 1, 2, 3$$

Es handelt sich somit um eine MÖBIUSTRANSFORMATION, welche 3 Fixpunkte hat. Also muß es die Identität sein.

$$S^{-1} \circ T = \text{id} \Rightarrow T = S$$

$$w = T(z) = T_2^{-1}(T_1(z))$$

$$\Rightarrow T_2(w) = T_1(z) \text{ (implizite Darstellung für } w = T(z)\text{)}$$

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Folgerung:

Eine MÖBIUSTRANSFORMATION T mit $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ genügt der Bedingung:

$$T(\bar{z}) = \overline{T(z)} \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$$

2.4.2 Spiegelung am Kreis

$$|z - a| = r : z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$$

- 1.) Gesucht sei eine Abbildung $T : \{\text{Im}(z) > 0\} \mapsto \{w \mid |w| < 1\}$. Die Funktion soll eine MÖBIUSTRANSFORMATION sein:

$$T = \frac{az + b}{cz + d}$$

Unsere Forderung ist also:

- 1.) $0 \mapsto -1$
- 2.) $1 \mapsto -i$
- 3.) $\infty \mapsto 1$

Die dritte Bedingung ergibt $a = c$. Daraus folgt:

$$T(z) = \frac{z + \tilde{b}}{z + \tilde{d}}$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich $\tilde{b} = \tilde{d}$:

$$T(z) = \frac{z - \tilde{b}}{z + \tilde{b}}$$

Jetzt ist nur noch die zweite Bedingung zu erfüllen:

$$T(1) = \frac{1 - \tilde{b}}{1 + \tilde{b}} = -i$$

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i} : \{z \mid \text{Im}(z) > 0\} \mapsto \{w \mid |w| < 1\}$$

$$T(z) = r \frac{z - i}{z + i} + a : \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0\} \mapsto \{w \mid |w - a| < r\}$$

Die Umkehrabbildung lautet:

$$T^{-1}(w) = i \frac{w - a + r}{-w + a + r}$$

- 2.) Wir suchen eine Abbildung, welche folgende Gerade auf die reelle Achse abbildet:

$$z(t) = a + te^{i\varphi}, t \in \hat{\mathbb{R}}, \tan \varphi = \text{Steigung}$$

$$T(z) = e^{-i\varphi}(z - a) : T(g) = \hat{\mathbb{R}}$$

Ergebnis:

$$1.) w = T_k(z) = i \frac{z - a + r}{-z + a + r} : \{z \mid |z - a| < r\} \mapsto \{w \mid \text{Im}(w) > 0\}, K : |z - a| = r$$

$$T_K(K) = \hat{\mathbb{R}}, T_K^{-1}(z) = r \frac{z - i}{z + i} + a$$

$$2.) w = T_g(z) = e^{-i\varphi}(z - a) : \{z \mid |z - a| = r\} \mapsto \hat{\mathbb{R}}$$

Definition (Spiegelung an K oder g/E):

Es sei $T \in M$ mit $T(E) = \hat{\mathbb{R}}$. Für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ wird mit $\varrho_E(z)$ der Spiegelungspunkt an E bezeichnet:
 $\varrho_E(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, wobei $T \in M$ mit $T(E) = \hat{\mathbb{R}}$ ist.

Um konkrete Formeln für Spiegelungen zu erhalten, setzen wir $T = T_K$ in die Definition ein, wobei man nun für die Spiegelung an einem Kreis erhält:

$$\varrho_k(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z \in \hat{\mathbb{C}}$$

Für die Spiegelung an einer Geraden ergibt sich:

$$\varrho_g(z) = e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{a}) + a, z \in \hat{\mathbb{C}}$$

„Vernünftige“ Spiegelungen erfüllen folgende Bedingungen:

- 1.) $\varrho_E = \varrho_E^{-1}$, $\varrho_E \circ \varrho_E = \text{id}$
- 2.) $\varrho_E(z) = z$, $z \in E$

Wir überprüfen die erste Bedingung durch Einsetzen:

$$\varrho_E(\varrho_E(z)) = T^{-1}(\overline{T(\varrho_E(z))}) = T^{-1}(\overline{T(T^{-1}(\overline{T(z)}))}) = z$$

Geometrie:

$$\varrho_k(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$$

$$|\varrho_k(z) - a| = \frac{r^2}{(z - a)^2} |z - a|$$

$\varrho_k(z)$, z und a liegen auf demselben Halbstrahl, der von a ausgeht.

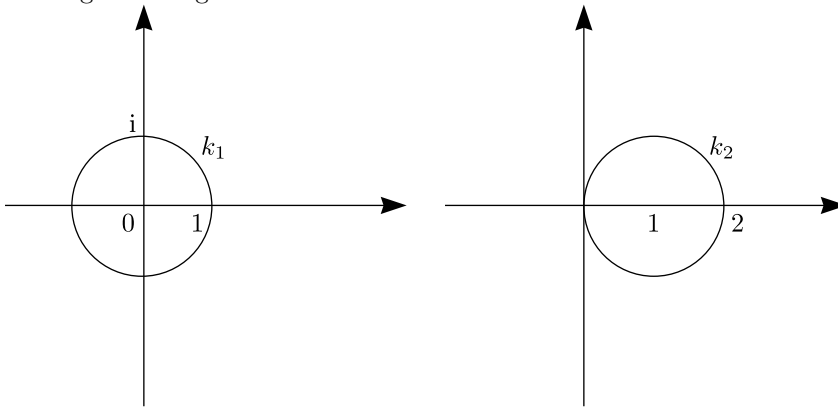
$$|\varrho_k(z) - a| |z - a| = r^2$$

Satz (Symmetrieprinzip für Möbiustransformationen):

Spiegelungspunkte gehen unter MÖBIUSTRANSFORMATIONEN über in Spiegelungspunkte. Es sei $L \in M$. Dann gilt:
 $L(\varrho_E(z)) = \varrho_{L(E)}(L(z))$

Beispiel:

Gesucht ist eine konforme Abbildung $\{z \mid |z| < 1\} \mapsto \{w \mid |w - 1| < 1\}$ mit $0 \mapsto \frac{1}{2}$ und $1 \mapsto 0$. Wir suchen also L mit folgenden Eigenschaften:



$$* L(0) = \frac{1}{2}$$

$$* L(1) = 0$$

$$L(\infty) = \varrho_{|z-1|} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} + 1 = -1$$

Daraus folgt nun:

$$L(z) = \frac{-z + 1}{z + 2}$$

Kapitel 3

Komplexe Kurvenintegrale

3.1 Einleitung

In diesem Abschnitt werden wir zwei wichtige Sätze kennenlernen:

- * CAUCHYScher Integralsatz
- * CAUCHYSche Integralformel

Definition:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit einer stetigen Abbildung $f : G \mapsto \mathbb{C}$, $f = u + iv$, wobei $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$.
 $g \subseteq G$ sei stückweise glatte Kurve, d.h. es gibt eine Darstellung $z(t) = x(t) + iy(t)$ mit $\dot{z}(t) \neq 0$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

Erinnerung:

In HMII hatten wir ein Linienintegral folgendermaßen definiert:

$$\int_{\gamma} \vec{v} d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \text{ mit } \gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b \text{ und } ds = \dot{\vec{r}}(t) dt$$

$$\int_{\gamma} g ds = \int_a^b g(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$$

Beispiele:

- 1.) Integration über den Viertelkreis im 1. Quadranten der komplexen Ebene:

$$f(z) = \bar{z}^2$$

Wir benötigen eine Parameterdarstellung für den Kreis:

$$z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Wir setzen diese Darstellung in die Funktion $f(z)$ ein:

$$f(z(t)) = e^{-2it}$$

$$\dot{z}(t) = ie^{it}$$

Daraus folgt nun das Integral:

$$\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2t} e^{it} dt = [-e^{-it}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i$$

2.) l -facher Kreisdurchlauf:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$a : \mathbb{C}$$

$g : |z-a| = r$ soll l mal im positiven Sinn durchlaufen werden:

$$z(t) = re^{it} + a, 0 \leq t \leq l \cdot 2\pi$$

$$\dot{z}(t) = i \cdot r e^{it} = i(z(t) - a)$$

Somit folgt durch Einsetzen in die Funktion $f(z)$ wiederum:

$$f(z(t)) = \frac{1}{(z(t)-a)^k} = r^{-k} e^{-ikt}$$

Das Integral ergibt sich nun folgendermaßen:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^k} = \int_0^{2\pi l} r^{-k} e^{-ikt} \cdot i r e^{it} dt = i r^{1-k} \int_0^{2\pi l} e^{(1-k)t} dt = \begin{cases} i2\pi l & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{für } k \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{|z-a|=r \\ l\text{-mal}}} \frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 1 \\ l & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

Das Ergebnis hängt nicht von r ab.

3.) Kompliziertes Integral:

$$\oint_{|z|=z} |z| \frac{e^z}{z^2} dz$$

$$z(t) = ze^{it}, 0 \leq t \leq 2$$

Nun folgt mit dem Beispiel vorher.

$$\oint_{|z|=z} \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) dz = 2 \oint_{|z|=z} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots \right) dz = 4\pi i$$

Wiederholung: Gaußscher Satz in der Ebene:

G sei ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^2 mit stückweise glatten positiv orientierten Rand ∂G . $P = P(x, y) \in C^{-1}(\overline{G})$. Dann gilt:

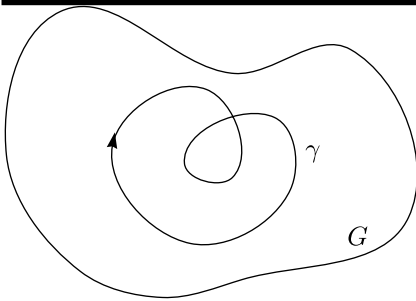
$$\oint_{\partial G} (P dx + Q dy) = \iint_G [D_1 Q(x, y) - D_2 P(x, y)] d(x, y)$$

3.2 Sätze über komplexe Kurvenintegrale

Satz ① (Integralsatz von Cauchy):

Es sei f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für jede stückweise glatte geschlossene Kurve $\gamma \subset G$:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$



Begründung:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

Wir zerlegen die Funktion $f(z)$ in Real- und Imaginärteil:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Des weiteren gilt durch Parametrisierung:

$$\gamma : z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, a \leq t \leq b, z(a) = z(b)$$

$$f(z(t))\dot{z}(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Somit folgt durch Einsetzen in das Integral:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt + i \int_a^b \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt$$

Da sowohl $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ Potentialfelder sind (siehe HMII), so folgt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 + 0 = 0$$

Bemerkung:

Setzt sich eine Kurve γ aus mehreren Teilkurven γ_i zusammen, so ergibt sich das Integral über γ als Summe der einzelnen Integrale über γ_i :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

Die Integration hängt natürlich auch von der Orientierung der Kurve ab. Die obige Formel gilt nur, wenn die Teilkurven γ_i dieselbe Orientierung haben. Besitzt γ die Parametrisierung $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, so gilt für die Kurve γ^- mit entgegengesetzter Orientierung beispielsweise die Parametrisierung:

$$\gamma^- : z = z(b + a - t), a \leq t \leq b$$

Beispiel:

$$f(z) = z, G = \text{[gelber Kreis]}$$

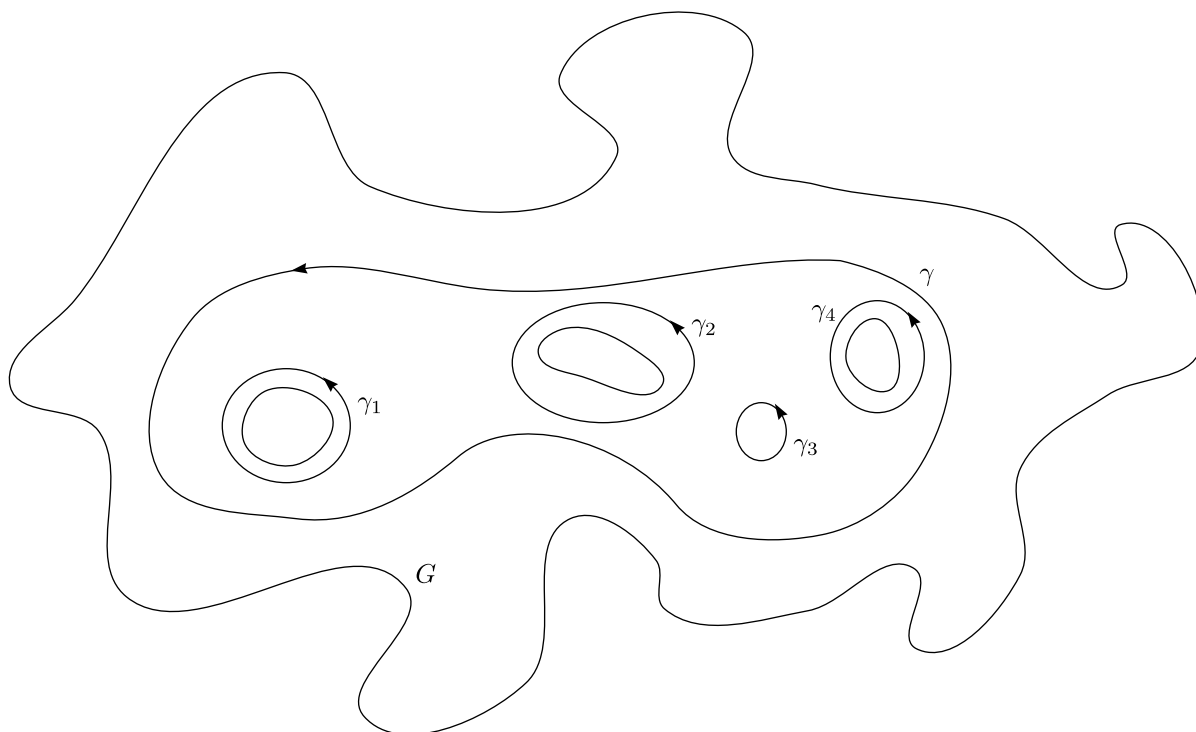
γ sei geschlossene Kurve:

$$z = z(t), a \leq t \leq b, z(a) = z(b)$$

$$\oint_{\gamma} z dz = \int_{t=a}^b z(t) \dot{z}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=a}^b (z^2(t))' dt = \frac{1}{2} (z^2(b) - z^2(a)) = 0$$

Dies gilt unabhängig von der Kurve γ .

Satz ② (Folgerung aus Satz ①):



$G \subset \mathbb{C}$ sei Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ seien stückweise glatte, geschlossene, doppel­punkt­freie, im selben Sinn orientierte Kurven. $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ verlaufen im Innengebiet von γ und γ_j verläuft im Außengebiet von γ_k ($k \neq j$). Das Gebiet zwischen γ und $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ liegt im Gebiet G . Dann gilt:

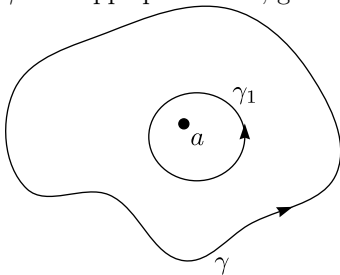
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \oint_{\gamma_k} f(z) dz$$

Beispiel:

Wir betrachten folgendes Fundamentalbeispiel:

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-a)^k} dz$$

γ sei doppel­punkt­freie, geschlossene Kurve um a . k seien ganze Zahlen: $k \in \mathbb{Z}$.



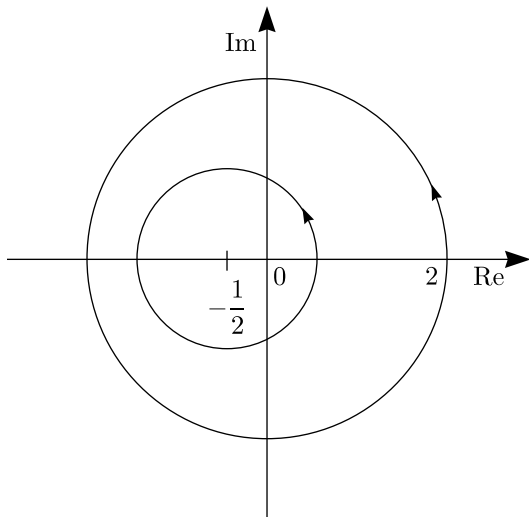
$$G = \mathbb{C} \setminus \{z = -a\}$$

$$m = 1, \gamma_1 : |z - a| = r$$

Daraus folgt nun:

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{für } k \neq 1 \end{cases}$$

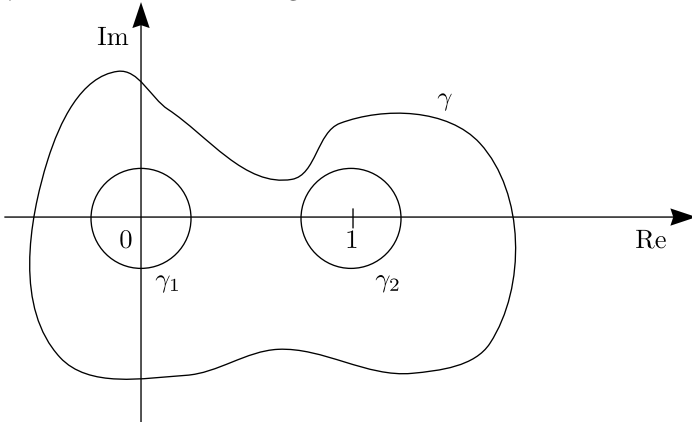
Beispiel:



$$\int_{|z+\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z}{z^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i$$

Beispiel:

γ habe die Voraussetzungen von Satz 2 und umschlieÙe die Punkte 0 und 1.



γ_1 und γ_2 seien genügend kleine Kreise um 0,1, die das äußere Gebiet nicht schneiden.

$$\oint_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$$

Durch Partialbruchzerlegung folgt:

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

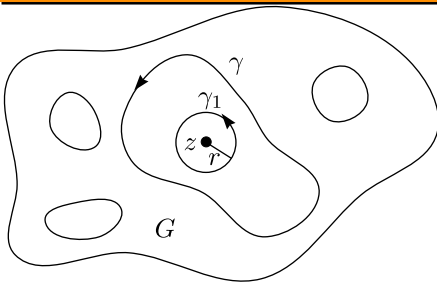


$$\underbrace{\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z}}_{2\pi i} + \underbrace{\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1}}_0 + \underbrace{\oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z}}_0 + \underbrace{\oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1}}_{2\pi i} = 4\pi i$$

Satz ③ (Integralformel von Cauchy):

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein beliebiges Gebiet, $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph. $\gamma \subset G$ sei geschlossene, doppelpunktfreie, positiv orientierte, stückweise glatte Kurven, deren Innengebiet zu G gehört. Dann gilt für jedes z in diesem Innengebiet:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



Wenn wir die Funktion f in Real- und Imaginärteil zerlegen, dann gilt die Potentialgleichung:

$$u_{xx} + v_{yy} = 0$$

Die Formel im Satz wird in zwei Dimensionen angewendet, um diese Differentialgleichung zu lösen.

Beweis:

Mittels des Satzes 2 folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{f(z)}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Wir gehen auf die Definition des Linienintegrals zurück:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it}) - f(z)}{re^{it}} ire^{it} dt$$

$$I_r = i \int_0^{2\pi} (f(z + re^{it}) - f(z)) dt$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{Länge von } \gamma \cdot \max |f(z)|, z \in \gamma$$

$$|I_r| \leq 2\pi \max |f(z + re^{it}) - f(z)|, 0 \leq t \leq \pi$$

Dies geht für $r \rightarrow 0$ gegen 0 aufgrund der Stetigkeit von f .

Beispiel:

Mit dem Satz ② folgt:

$$\oint_{\gamma} \frac{2\zeta - 1}{\zeta(\zeta - 1)} d\zeta = \oint_{\gamma_1} \frac{2\zeta - 1}{\zeta(\zeta - 1)} d\zeta + \oint_{\gamma_2} \frac{2\zeta - 1}{\zeta(\zeta - 1)} d\zeta = \oint_{\gamma_1} \frac{2\zeta - 1}{\zeta - 0} d\zeta + \oint_{\gamma_2} \frac{2\zeta - 1}{\zeta - 1} d\zeta$$

Nun ergibt sich mit Satz ③:

$$2\pi i \frac{2\zeta - 1}{\zeta - 1} \Big|_{\zeta=0} + 2\pi i \frac{2\zeta - 1}{\zeta} \Big|_{\zeta=1}$$

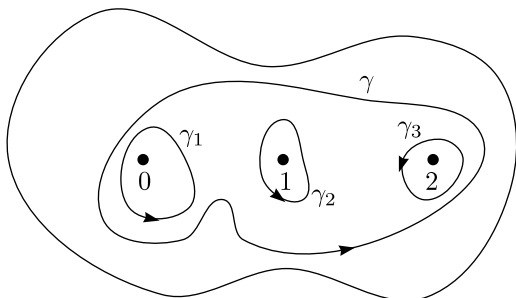
Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 1)(z - 2)}$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

Dieses Beispiels behandeln wir mit zwei Arten. Einmal mit Satz ② und dann mit Satz ③.

* Lösung mit Satz ②:



Durch Partialbruchzerlegung folgt wiederum:

$$\frac{1}{z(z - 1)(z - 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - 2}$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \oint_{\gamma_3} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{2} \frac{dz}{z} + \oint_{\gamma_2} -\frac{dz}{z - 1} + \frac{1}{2} \oint_{\gamma_3} \frac{dz}{z - 2} = \pi i - 2\pi i + \pi i = 0$$

* Lösung mit Satz ③:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z(z - 1)(z - 2)}$$

$$\oint_{\gamma} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^3 \oint_{\gamma_j} \tilde{f}(\zeta) d\zeta$$

$$\oint_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - 2)} = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - 0} d\zeta$$

$$z = 0, \tilde{f}(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

Somit folgt:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)} d\zeta = 2\pi i \tilde{f}(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

Die restlichen Integrale folgen dann analog, wobei wir dasselbe Endergebnis wie mit Satz ② erhalten.

Kapitel 4

Potenzreihenentwicklungen, Taylorreihe

4.1 Laurent-Reihe

Wir wollen uns nun mit Reihen folgender Form beschäftigen:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k$$

Dieses erinnert stark an Fourierreihen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

Diese Reihen sind **konvergent**, falls $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ konvergieren. Nun kommen wir zu den LAURENT-Reihen. Eine LAURENTreihe um z_0 ist von der Form:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

Satz ①:

Es seien $r = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$, $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$. Dann konvergiert die LAURENT-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ für alle z mit $r < |z| < R$. Beim Konvergenzbereich handelt es sich also um einen Kreisring. Divergenz liegt vor für $|z| < r$ oder $|z| > R$ oder auch falls $R < r$. Gilt $r < R$, so stellt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ in $r < |z| < R$ eine holomorphe Funktion f dar. Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ ist die Konvergenz auf dem Kreisring $\{z | \varrho_1 \leq |z| \leq \varrho_2\}$ gleichmäßig. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

Begründung:

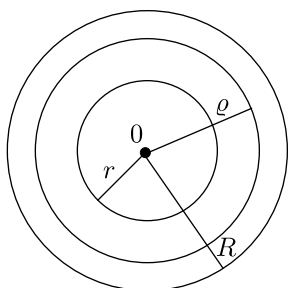
$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \underbrace{\left(\frac{1}{z - z_0}\right)^k}_{w^k}$$

Nun gilt für den Konvergenzradius für diese Reihe:

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{r}$$

Für den Konvergenzbereich für den Hauptteil gilt:

$$z_0 = 0 : \frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r} : |z| > r$$



Der **Nebenteil** konvergiert für $|z| < R$. Für $|\zeta| = \rho$ liegt gleichmäßige Konvergenz vor. Wir integrieren:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \oint_{|\zeta|=\rho} \left[\frac{1}{\zeta^{k+1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n \right] d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \underbrace{\zeta^{n-k-1}}_{\neq 0 \text{ nur für } n=k} d\zeta = a_k$$

Satz ②:

Es sei f im Kreisring $\{z | r < |z| < R\}$ holomorph ($r \geq 0, 0 < R \leq \infty$). Dann gilt dort:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Für $r < \rho < R$ gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

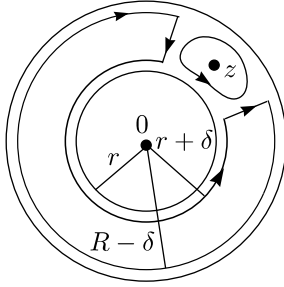
Die LAURENTentwicklung von f in $r < |z - z_0| < R$ ist **eindeutig**.

Beweis:

Hier benötigen wir außerdem die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \text{ für } |q| < 1$$

Mit Satz ③ folgt nun:



$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{1}{\zeta} f(\zeta) \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta) \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{1}{\zeta} f(\zeta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^k} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta) \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^k} d\zeta = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right)}_{a_k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) z^{-k-1}
 \end{aligned}$$

Das erste Integral stellt die Koeffizienten a_k dar. Für den zweiten Ausdruck folgt durch Transformation der Summe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) z^{-k-1} = \sum_{l=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r+\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{l+1}} d\zeta \right) z^l = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$$

Somit ergibt sich nun:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$$

Definition:

Ist f holomorph in $\{z \mid |z - z_0| < R\} \setminus \{z_0\}$ aber in z_0 nicht holomorph, so heißt z_0 **isolierte Singularität**.

z_0 sei eine isolierte Singularität. Berechne in $0 < |z - z_0| < R$ die LAURENTreihe:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \dots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Definition:

z_0 heißt **hebbare** Singularität, falls $a_{-k} = 0$ für $k = 1, 2, \dots$ (Hauptteil=0), heißt **Polstelle** der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, falls $a_k = 0$, $k = m + 1, \dots$ und $a_{-m} \neq 0$. z_0 heißt **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendliche viele $k \in \mathbb{N}$. a_{-1} heißt **Residuum** von f an der Stelle z_0 und wir schreiben $\text{Res}(f, z_0)$.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}, |z| > 0$$

Für das sogenannte Residuum folgt nun mit $k = -1$:

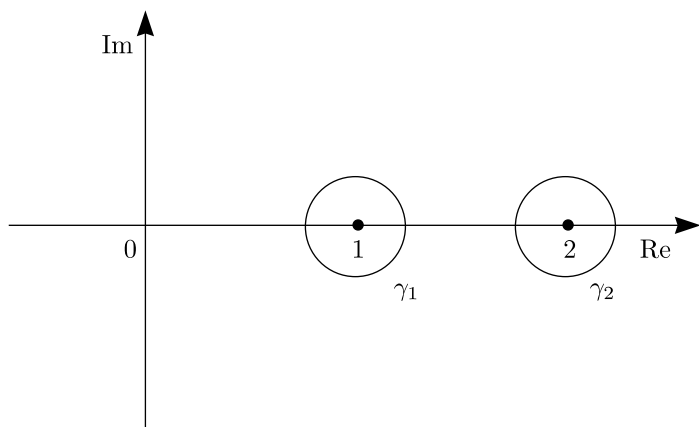
$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} f(\zeta) d\zeta \text{ für } 0 < \rho < R$$

Beispiel:

* Folgende Funktion soll um 1 entwickelt werden, so daß Konvergenz in $\frac{3}{2}$ vorliegt.

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

1 und 2 sind isolierte Singularitäten:



Wir suchen somit die LAURENTreihe, die im Bereich $0 < |z - 1| < 1$ konvergiert. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{1}{z - 2} = -\frac{1}{z - 1} \cdot \frac{1}{1 - (z - 1)} = -\frac{1}{z - 1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z - 1)^k = \\ &= -\frac{1}{z - 1} (1 + (z - 1) + (z - 1)^2 + (z - 1)^3 + \dots) = -\frac{1}{z - 1} - 1 - (z - 1) - (z - 1)^2 - \dots \end{aligned}$$

Somit folgt für das Residuum einfach durch Ablesen:

$$\text{Res}(f; 1) = -1$$

* Nun soll die Funktion um 1, aber mit Konvergenz in $\frac{5}{2}$, entwickelt werden. Der relevante Bereich ist somit $|z - 1| > 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{1}{(z - 1) - 1} = \frac{1}{(z - 1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z - 1}} = \frac{1}{(z - 1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z - 1)^k} = \\ &= \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1}{(z - 1)^3} + \dots \end{aligned}$$

Hier ist der Koeffizient a_{-1} nicht vorhanden, woraus man aber nicht schließen darf, daß das Residuum 0 ist. Nur die erste LAURENTreihe bei der isolierten Singularität liefert uns somit das Residuum.

* Wir entwickeln um 0, wobei Konvergenz in $\frac{1}{2}$ vorliegen soll. Gesucht ist deshalb eine Reihe folgender Form:

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } |z| < 1$$

Somit erhalten wir zwei geometrische Reihen, welche miteinander multipliziert werden:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(1-z) \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^j, |z| < 1$$

Mittels des CAUCHY-Produktes und der geometrischen Summe folgt als Ergebnis:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k$$

Eine andere Möglichkeit auf das Ergebnis zu kommen, wäre eine Partialbruchzerlegung.

Satz ③ (Taylorentwicklung):

Ist f holomorph in $D = \{z \mid |z - z_0| < R\}$, dann gilt für $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \text{ für } 0 < \varrho < R$$

Beweis:

Mittels des Satzes 2 folgt:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, 0 < |z - z_0| < R$$

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{k+1} d\zeta \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

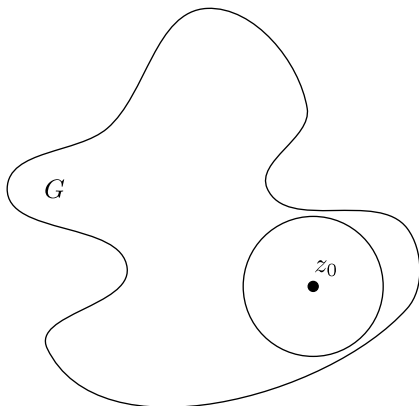
Mit Hilfe des CAUCHY-RIEMANNschen Integralsatzes können wir sagen, daß hier das Ergebnis 0 ist:

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{k+1} d\zeta = 0$$

Somit fallen die Koeffizienten a_{-k} weg, woraus dann folgt:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, 0 < |z - z_0| < R = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, |z - z_0| < R$$

Folgerung ①:



Eine holomorphe Funktion ist in ihrem Definitionsgebiet beliebig oft differenzierbar.

Folgerung ②:

Ist f holomorph in $|z - z_0| < R$, so gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \text{ für } 0 < \varrho < R$$

Dies ist die schon bekannte CAUCHY-Integralformel. Diese Beziehung können wir noch verallgemeinern:

$$f(z_0)^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \text{ mit } 0 < \varrho < R \text{ und } k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel:

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^4} d\zeta = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{\pi i}{3} \quad z_0 = 0, \varrho = 0, f(z) = e^z, k = 3$$

4.2 Isolierte Singularität und Residuensatz

Wir fassen nochmals zusammen:

z_0 sei isolierte Singularität. Wir haben die LAURENTreihe von oben. z_0 heißt nun **hebbbar**, falls $a_k = 0, k = -1, -2, -3, \dots$ z_0 heißt **Polstelle** der Ordnung m , falls $a_{-k} = 0, k = m + 1, m + 2, \dots$ z_0 heißt **wesentliche** Singularität, falls $a_{-k} \neq 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

* Hebbare Singularität:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$z_0 = 0$ ist eine isolierte Singularität. Wir berechnen die LAURENTreihe:

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots$$

Es gilt nun $f(0) = 1$, womit gezeigt ist, daß $z = 0$ eine hebbare Singularität ist. Wir können dies auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ bleibt beschränkt.}$$

* Polstelle:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad 0 < |z-1| < 1 \quad -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) \mp \dots$$

$z_0 = 1$ ist somit Polstelle 1.Ordnung.

$$f(z) = \frac{1}{(\sin(z_0))^2}$$

$z = 0$ ist eine isolierte Singularität. Wir schreiben die LAURENTreihe hin:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots\right)^2} = \frac{1}{(z + zo(1))^2} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{(1 + o(1))^2} = \frac{1}{z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (o(1))^k\right)^2 = \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + o(1))^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{a}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{aligned}$$

Wir haben hier somit eine Polstelle 2.Ordnung.

* Wesentliche Singularität:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$

$z = 0$ ist eine wesentliche Singularität.

Nun ist noch eine Sache ungeklärt, und zwar, was nichtisolierte Singularitäten sind. Betrachten wir hierzu den komplexen Logarithmus:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z). \quad -\pi < \arg(z) < \pi$$

Jeder Punkt der negativen reellen Achse ist nichtisolierte Singularität.

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$z = 0$ ist nichtisolierte Singularität. Für $z_k = \frac{1}{k\pi}$ wird der Nenner 0. Ab einem gewissen k befinden sich alle Punkte innerhalb eines Kreises mit Radius ε . Diese Folge konvergiert, $z = 0$ ist Häufungspunkt dieser Folge, womit sie eine nichtisolierte Singularität darstellt.

Bemerkung:

$f(z)$ sei bei einer wesentlichen Singularität nicht definiert. Betrachten wir $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Es sei $z = iy$, womit für $y \mapsto 0$ kein Grenzwert existiert. Für $z = x > 0$ und $x \mapsto 0$ folgt $|e^z| \mapsto \infty$.

Satz ①:

f hat in z_0 eine Polstelle der Ordnung m . Genau dann gibt es eine holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$. Dann hat $\frac{1}{f(z)}$ Nullstellen m -ter Ordnung in z_0 .

Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} : \frac{1}{f(z)} = (z-1)(z-2)$$

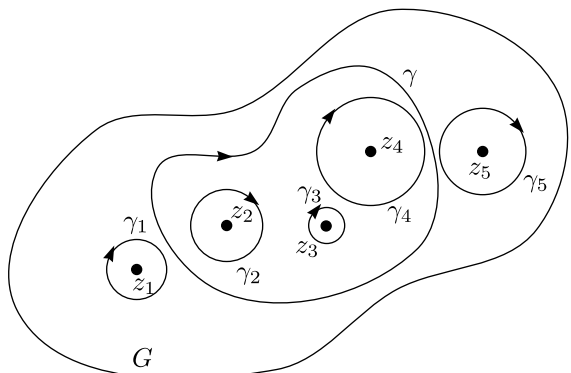
Nun gilt:

$$f(z)(z - z_0)^m = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots = g(z), g(z_0) = a_m \neq 0$$

Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} : \frac{1}{f(z)} = \sin^2 z$$

Satz ② (Residuensatz):



\$G\$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. \$f : G \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \mapsto \mathbb{C}\$ sei holomorph. \$z_1, z_2, \dots, z_n\$ seien die isolierten Singularitäten von \$f\$. \$\gamma\$ sei eine geschlossene doppeltpunktfreie Kurve in \$G\$ mit \$z_j \notin \gamma\$ (\$j = 1, \dots, n\$); \$\gamma\$ sei positiv orientiert. Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_j \text{Res}(f; z_j) \right)$$

\$z_j\$ sei innerhalb von \$\gamma\$, beispielsweise \$j = 2, 3, 4\$.

Beweis:

Mittels des zweiten CAUCHY-Integralsatzes folgt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_j \oint_{K_j} f(z) dz = \sum_j 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_j) = 2\pi i \cdot \sum_j \text{Res}(f; z_j)$$

Beispiel:

1.) \$z_0\$ sei Polstelle \$m\$-ter Ordnung. Dazu multiplizieren wir die Reihe mit \$(z - z_0)^m\$ durch:

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}$$

Wir leiten diesen Ausdruck \$m - 1\$ mal nach \$z\$ ab:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} D^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]_{z=z_0} = \text{Res}(f; z_0)$$

Für \$m = 1\$ gilt beispielsweise:

$$\text{Res}(f; z_0) = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$$

Hat \$f\$ die Form \$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}\$ mit \$g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0\$. Dann ist \$z_0\$ Polstelle 1. Ordnung. \$g\$ und \$H\$ seien außerdem holomorph. Dann folgt mit obiger Formel:

$$\text{Res} \left(\frac{g}{h}; z_0 \right) = (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \Big|_{z=z_0}$$

Da g und h holomorph sind, können wir diese in eine Reihe entwickeln:

$$h(z) = h(z_0) + (z - z_0)h'(z_0) + (z - z_0)o(1) = (z - z_0)h'(z_0) + (z - z_0)o(1) \quad (z \mapsto z_0)$$

Durch Ausklammern von $(z - z_0)$ folgt:

$$h(z) = (z - z_0)(h'(z_0) + o(1))$$

Damit folgt nun durch Einsetzen:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}; z_0\right) = (z - z_0) \frac{g(z)}{(z - z_0)(h'(z_0) + o(1))} \Big|_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

2.) Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\oint_{|\zeta|=2} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\zeta}}}{\zeta - 1}}_{f(\zeta)} d\zeta = 2\pi i (\operatorname{Res}(f; 0) + \operatorname{Res}(f; 1))$$

0 ist eine wesentliche Singularität und 1 eine Polstelle 1. Ordnung. Damit berechnen wir die Residuen an diesen beiden Stellen:

$$\operatorname{Res}(f; 1) = (z - 1) \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z - 1} \Big|_{z=1} = e$$

Da bei 0 eine wesentliche Singularität vorliegt, können wir obige Formel nicht anwenden. Wir müssen die LAURENTreihe bilden:

$$\frac{1}{z - 1} e^{\frac{1}{z}} = -(1 + z + z^2 + \dots) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots\right) \quad \text{für } |z| < 1$$

Wir multiplizieren die ersten Koeffizienten aus, wobei wir a_{-1} erhalten:

$$-(1 + z + z^2 + \dots) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \dots - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \dots$$

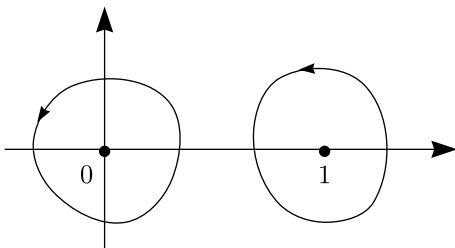
Mittels der Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion folgt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1$$

Somit folgt für das Residuum:

$$\operatorname{Res}(f; 0) = 1 - e$$



4.3 Auswertung (reeller uneigentlicher) Integrale

4.3.1 Linienintegrale mit Residuensatz

In HM II hatten wir ein Linienintegral folgendermaßen berechnet:

$$\oint_{\gamma} h(z) dz = \int_a^b h(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

$$\gamma : z = z(t), a \leq t \leq b$$

$$z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Satz ①:

$G = \{z, |z| \leq 1\}$; $z_1, z_2, \dots \in G$ seien isolierte Singularitäten der auf $G \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ holomorphen Funktion f mit $|z_j| \neq 1 \forall j$. Dann hat man:

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = 2\pi \left(\sum_l \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{z}; z_l \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{z}; 0 \right) \right) \text{ für } 0 < |z_l| < 1$$

Beweis:

$$z(t) = e^{it}$$

$$dz = ie^{it} dt = iz dt$$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \oint_{|z|=1} f(z) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$$

Dies ergibt dann den Residuensatz.

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{it}) dt = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{\cos z}{z}; 0 \right) = 2\pi \left(z \cdot \frac{\cos z}{z} \right) = 2\pi \cos(z)|_{z=0} = 2\pi$$

Beispiel:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1}$$

Dies stellt natürlich kein geschlossener Integrationsweg dar. Da wir aber eine periodische Funktion haben, folgt:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) + 1}, a \in \mathbb{C}$$

Außerdem gilt nun:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{-ae^{2it} + (1+a^2)e^{it} - a} dt$$

Durch Umformung von $f(z)$ folgt:

$$f(z) = \frac{z}{-az^2 + (1+a^2)z - a} = \frac{z}{-a(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

Damit können wir nun das Integral berechnen:

$$I = -\frac{1}{a} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

a und $\frac{1}{a}$ sind Polstellen 1. Ordnung. Wir wenden den Residuensatz an:

$$|a| < 1 : \text{Res} \left(\frac{1}{(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)}; a \right) = \frac{1}{a - \frac{1}{a}}$$

$$|a| < 1 : I = -\frac{1}{a} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(a - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a} \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{1}{1 - a^2}$$

Als Übung ist zu zeigen:

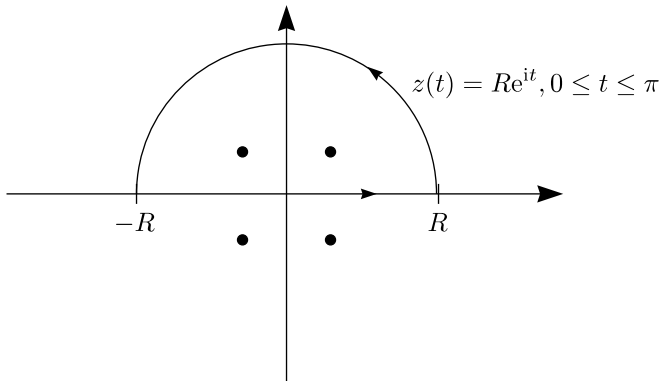
$$|a| > 1 : I = \frac{1}{a^2 - 1}$$

4.3.2 Uneigentliche Integrale mit Residuensatz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, f(x) = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

Die Singularitäten, also die Nullstellen des Nenners, sind folgende:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$



Satz ②:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $\{z | \text{Im}(z) \geq 0\} \subset G$. $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, von denen keine reell ist. z_1, z_2, \dots, z_S liege in der oberen Halbebene ($\text{Im}(z_k) > 0, k = 1, \dots, S$). Es gelten nun:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{it}) dt = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^S \text{Res}(f; z_k)$$

Bemerkung:

Wir hatten in HM I folgendes definiert:

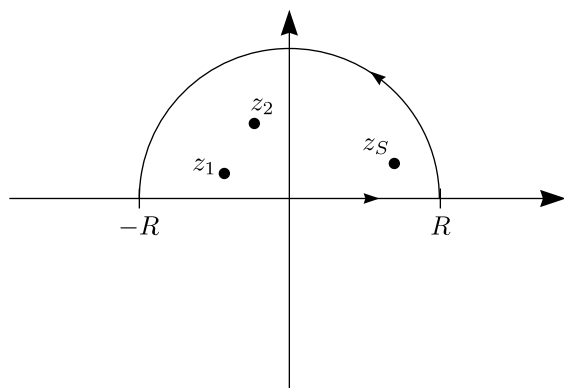
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \bar{R} \rightarrow -\infty}} \int_{\bar{R}}^R f(x) dx, \text{ wobei } \lim_{R \rightarrow \infty}, \lim_{\bar{R} \rightarrow -\infty} \text{ unabhängig voneinander sind.}$$

Somit gilt:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx + \lim_{\bar{R} \rightarrow -\infty} \int_{\bar{R}}^0 f(x) dx$$

Ein kann sein, daß eine Integral nur als CAUCHYSCHER Hauptwert, aber nicht als uneigentliches Integral existiert.

Beweis:



$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{\pi} f(Re^{it}) i \cdot Re^{it} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^S \text{Res}(f; z_k)$$

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^S \text{Res}(f; z_k) - i \int_0^{\pi} f(Re^{it}) Re^{it} dt$$

Wenn wir den Grenzübergang von $R \mapsto \infty$ bilden, folgt Satz ②.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}, f(z) = \frac{1}{1+z^4}, z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^4 e^{4it}} Re^{it} dt$$

Wir schätzen ab:

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^4 e^{4it}} Re^{it} dt \right| \leq \pi \max_{0 \leq t \leq \pi} \frac{|Re^{it}|}{|1+R^4 e^{4it}|} \leq \pi \frac{R}{R^4 - 1} \mapsto 0 \text{ für } R \mapsto \infty$$

Damit folgt das Ergebnis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{1}{1+z^4}; e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{1+z^4}; e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \right)$$

Dies sind Polstellen 1.Ordnung. Damit folgt:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}; e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}; e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} \frac{1}{e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Das Ergebnis ist somit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Beispiel:

Wir berechnen das vorige Integral allgemein:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n}$$

Da es sich um Polstellen erster Ordnung handelt, folgt:

$$\operatorname{Res}(f, a_\nu) = \frac{g(x)}{h'(x)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^n}, e^{i\pi(1+2k)}\right) = \frac{1}{nz^{n-1}}\Big|_{z=e^{i\pi(1+2k)}} = \frac{1}{ne^{i\pi(1+2k)} \cdot e^{-\frac{i\pi(1+2k)}{n}}} = -\frac{1}{n}e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot e^{2\pi i \frac{k}{n}}$$

Wir berechnen die Anzahl der Residuen im Intervall $[0; \pi]$:

$$\frac{\pi + 2k\pi}{n} \leq \pi$$

$$\pi + 2k\pi \leq n\pi$$

$$2k\pi \leq \pi(n - 1)$$

$$k \leq \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

Damit gilt:

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für das Integral folgt nun für gerades n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n} = 2\pi i \sum_i^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^n}, e^{i\pi(1+2k)}\right)$$

Die Summe berechnen wir mittels der Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ für } q \neq 1$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot e^{2\pi i \frac{k}{n}} = -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^k = -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot (\frac{n}{2}-1+1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{e^{-\frac{i\pi}{n}}} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n}{2}} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = -\frac{1}{n} \frac{1}{e^{-\frac{i\pi}{n}}} \cdot \frac{e^{\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\pi i} - 1}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{-1 - 1}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} \end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n} = 2\pi i \sum_i^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^n}, e^{i\pi(1+2k)} \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} = 2 \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Setzen wir nun $n = 4$, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^4} = 2 \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{2}$$

Damit folgt also unser zuvor berechnetes Ergebnis.

Kapitel 5

Differentialgleichungen

5.1 Implizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Es sei $F(x, y, y') = 0$ gesucht mit $y = \varphi(x)$ und $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \forall x \in I$. Die Kurvendarstellung in impliziter Form lautet:

$$\phi(x, y) = c$$

Beispiel:

$$x^2 + y^2 = 9$$

In Parameterdarstellung schreiben wir:

$$x = \Psi(t) = \chi(t)$$

Beispiel:

$$x = \sqrt{5} \cos(t)$$

$$y = \sqrt{5} \sin(t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(G)$ und $D_3 F(x, y, y') \neq 0$ in G . Wir nehmen an, daß $y = \varphi(x) \in C^2(I)$ ($\hat{=}$ 2 mal stetig differenzierbar) eine Lösung der Differentialgleichung ist.

1.) $\varphi''(x) = 0$

$\varphi(x) = ax + b$ mit $a, b = \text{const.}$ ist eine Lösung, falls $F(x, ax + b, a) = 0$. $y = \varphi(x) = ax + b$ ist Lösung, falls $F(x, ax + b, a) = 0 \forall x \in I$ gilt.

Beispiel:

1.) CLAIRAUTSche Differentialgleichung

$$y = xy' + g(y')$$

$$ax + b = ax + g(a)$$

$$b = g(a)$$

Damit folgt, daß $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ eine Lösung für jedes a darstellt. Es handelt sich jedoch um keine beliebige Gerade, da die Abhängigkeit $b = g(a)$ besteht.

$$2.) y = xf(y') + g(y')$$

$$ax + b = xf(a) + g(a)$$

$$a \stackrel{!}{=} f(a), b \stackrel{!}{=} g(a)$$

Für jedes a mit $f(a) = a$ ist die Gerade $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ Lösung.

$$2.) \varphi''(x) \neq 0 \forall x \in I$$

$$t = \varphi'(x) \Rightarrow x = \Psi(t), t \in J$$

$$y = \varphi(x) \Rightarrow y = \varphi(\Psi(t)) = \chi(t), t \in J$$

Es sei $y = \varphi(x)$ eine Lösung in Parameterdarstellung mit $x = \Psi(t)$, $y = \chi(t)$.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \forall x \in I$$

Damit folgt dann:

$$F(\Psi(t), \chi(t), t) = 0$$

$$\chi(t) = \varphi(\Psi(t))$$

Durch Ableiten nach t resultiert:

$$\chi'(t) = \varphi'(\Psi(t))\Psi'(t) = \dot{\Psi}(t)t$$

Die Lösungen der Gleichung $f(\Psi(t), \chi(t), t) = 0$ sind $x = \Psi(t)$, $y = \chi(t)$. $\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$, $t \in J$ liefert eine Parameterdarstellung für Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$.

Beispiel:

$$y = \underbrace{xf(y')}_{xy'^2} + \underbrace{g(y')}_{y'}$$

$$\chi = \Psi(t)f(t) + g(t)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$$

$$\dot{\chi}(t) = \underbrace{\dot{\Psi}(t)f(t)}_{t^2-t} + \underbrace{\Psi(t)\dot{f}(t)}_{2t} + \dot{g}(t) = t \underbrace{\Psi'(t)}_1$$

$$\dot{\Psi}(t)(f(t) - t) + \Psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t) = 0$$

Beispiel:

Wir betrachten wieder die CLAIRAUTSche Differentialgleichung:

$$y = xy' + g(y')$$

$$f(t) = t$$

$$x = \Psi(t) = -\dot{g}(t)$$

$$y = \chi(t) = -\dot{g}(t)t + g(t)$$

$$y = xy' + y'^2, g(t) = t^2$$

$$x = \Psi(t) = -2t$$

$$y = \chi(t) = -2t^2 + t^2 = -t^2$$

Es sei $y = ax + a^2$ eine Lösung. Die explizite Lösung lautet:

$$y = -\frac{1}{4}x^2$$

Jede Tangente an $y = -\frac{1}{4}x^2$ hat die Form $y = ax + a^2$. Jede Gerade der Form $y = ax + a^2$ ist Tangente an $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form $\phi(y, y', y'') = 0$, in der x nicht explizit auftritt.

$$y'' + \frac{g}{l} \sin y = 0$$

Wir suchen y' als Funktion von y . $y' = p(y) \Rightarrow y = y(x)$. Welcher Gleichung muß $p = p(t)$ genügen, damit $y'(x) = p(y(x))$ Lösung von $\phi(y, y', y'') = 0$ ist?

$$\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t))$$

$$y''(x) = \dot{p}(y(x))y'(x) = \dot{p}(y(x))p(y(x))$$

$$p = p(t)$$

Das Vorgehen ist nun folgendes:

- 1.) Löse $\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0, t \in I$.
- 2.) Berechne $y(x)$ aus $y'(x) = p(y(x))$.

Beispiel:

Es sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'' = yy' + y^2$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$y(1) = 0, y'(1) = -1$$

Wir gehen nach obiger Anleitung vor.

$$1.) pp' = tp + p^2$$

Eine Lösung hiervon ist $p = 0 = y'(x)$, womit durch Integration folgt:

$$y(x) = \text{const.}$$

Diese Funktion erfüllt jedoch nicht das Anfangswertproblem und stellt somit keine Lösung dar!

$$p'(t)e^{-t} - e^{-t}p(t) = te^{-t}$$

$$(pe^{-t})' = te^{-t}$$

Somit ergibt sich:

$$pe^{-t} = e^{-t}(t - 1) + C_1, p(t) = -t - 1 + C_1e^{+t}$$

$$2.) y'(x) = -y(x) - 1 + C_1e^{+y(x)}$$

$$\underbrace{y'(1)}_{-1} = -\underbrace{y(1)}_0 - 1 + C_1 \underbrace{e^{y(1)}}_1$$

Damit ergibt sich $C_1 = 0$.

$$y'(x) = -y(x) - 1$$

$$\frac{y'}{y+1} = -1$$

Durch Integration folgt:

$$\ln(y+1) = -x + C_2$$

$$\ln(y(1)+1) - 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\ln(y(x)+1) = -x + 1$$

Somit folgt für die Lösung:

$$y(x) = -1 + e^{1-x}$$

Beispiel:

$$y = y' + y'^2$$

$$y'(x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x = \Psi(t) = \ln t + 2t + C_1, t > 0$$

$$y = \chi(t) = t + t^2$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$$

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{1}{t} + 2$$

Gesucht ist die Lösung durch $(1, 2)$, also $t_0 = (1 | -2)$.

$$\chi(t_0) = t_0 + t_0^2 = 2$$

$$\Psi(t_0) = \ln t_0 + 2t_0 + C_1 = 1$$

Somit gilt $C_1 = -1$. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

$$y = t + t^2$$

$$x = \ln t + 2t - 1$$

Wir behandeln nochmals die CLAIRAUTSche Differentialgleichung, aber auf eine andere Art:

$$y(x) = xy'(x) + g(y'(x))$$

Wir differenzieren zuerst nach x :

$$y'(x) = y'(x) + xy''(x) + \dot{g}(y'(x))y''(x)$$

$$0 = xy''(x) + \dot{g}(y'(x))y''(x)$$

Nun kann man $y''(x)$ ausklammern:

$$0 = y''(x) (x + \dot{g}(y'(x)))$$

Damit gilt also

$$y''(x) = 0$$

Und somit folgt schließlich:

$$y(x) = ax + b$$

Wir setzen dies zur Probe in die Differentialgleichung ein, wobei nun eine Beziehung zwischen b und a folgt:

$$b = g(a)$$

Außerdem kann noch der Ausdruck in der zweiten Klammer gleich Null sein:

$$x = -\dot{g}(y'(x)) : x = -\dot{g}(t)$$

$$y = -\dot{g}(t)t + g(t)$$

Dies ist die Methode der Integration durch Differentiation.

Beispiel:

Wir integrieren folgende Differentialgleichung:

$$y' = \phi(x, y) \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = \int_{x_0}^x \phi(t, y(t)) dt + y_0$$

Dann kann man eine Lösung durch Iteration finden:

$$y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x \phi(t, y_n(t)) dt + y_0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_0(x) = y_0$$

5.2 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor

$$y' = \phi(x, y) = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

Wir multiplizieren mit $g(x, y) \neq 0$ und bringen alles auf eine Seite:

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

Wir suchen eine Lösung in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$. Wir setzen dies ein und erhalten:

$$f(x(t), y(t)) + g(x(t), y(t)) \cdot \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

$$f(x(t), y(t))\dot{x}(t) + g(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0 \quad (\star)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}, \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

Wir multiplizieren mit dt durch:

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

In dieser Differentialgleichung ist die explizite Form $y = y(x)$ enthalten, die implizite Form $x = x(y)$ und außerdem die Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$. Lösen von (1) bedeutet:

Suche $x = x(t), y = y(t) \in \mathbb{C}^1(J)$ ($J \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$) mit (\star) . Die Voraussetzung ist nun, daß $f, g \in C^1(G)$, wobei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^2 ist.

$$f^2(x, y) + g^2(x, y) \neq 0 \text{ mit } (x, y) \in G$$

Ordne (1) folgendes Vektorfeld zu:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

(\star) kann dann so geschrieben werden mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$$

$$p(t) = \vec{\nabla} h(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Ist \vec{v} ein Potentialfeld, d.h. $\vec{v} = \vec{\nabla} h$, dann ist $h(\vec{r}(t)) = \text{const.}$

Definition:

Die Gleichung (1) heißt **exakt** in G , falls \vec{v} in G ein Potentialfeld ist, d.h.

$$D_2 f(x, y) = D_1 g(x, y) \text{ für } (x, y) \in G$$

Satz ①:

Es sei die Differentialgleichung (1) in G exakt und h ein Potentialfeld zu \vec{v} . Dann sind alle Lösungen von (1) implizit und $h(x, y) = C$ (beliebig) gegeben. (Jede Höhenlinie von H ist Lösung von (1) und jede Lösung von (1) ist Höhenlinie von h .)

Beweis:

Wir notieren uns nochmals Gleichung (1):

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

$$D_2 f(x, y) = D_1 g(x, y)$$

a.) $h(x, y) = C$ definiert implizit die Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $h(x(t), y(t)) = C$.

Wir differenzieren dies nach t :

$$0 = \underbrace{\vec{\nabla} h(x(t), y(t))}_{\vec{v}(\vec{r}(t))} \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad \forall t \in J$$

b.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$

$$D_t h(\vec{r}(t)) \Rightarrow h(\vec{r}(t)) = \text{const.}$$

Beispiel:

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$y' = p(x)q(y)$$

$$p(x)q(y) dx - dy = 0$$

Diese Gleichung ist auf keinen Fall exakt. Deshalb dividieren wir durch $q(y)$ durch:

$$p(x) dx - \frac{1}{q(y)} dy = 0$$

Diese Differentialgleichung ist nun exakt. Also können wir die neue Methode anwenden:

$$p(x) = D_1 h$$

$$q(y) = D_2 h$$

Es gilt also:

$$D_1 h(x, y) = p(x)$$

Daraus resultiert:

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x p(t) dt + \lambda(y)$$

$$D_2 h(x, y) = \lambda'(y) = -\frac{1}{q(y)} \Rightarrow \lambda(y) = -\int_{y_0}^y \frac{dt}{q(t)}$$

Also folgt:

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x p(t) dt - \int_{y_0}^y \frac{dt}{q(t)} = C$$

Dies sind alle Lösungen für x_0, y_0 und beliebigem C . Die Lösung durch (x_0, y_0) erhält man für $C = 0$.

5.3 Der integrierende Faktor

Die Differentialgleichung $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$ sei **nicht** exakt:

$$D_2 f(x, y) \neq D_1 g(x, y)$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer beliebigen Funktion $\mu(x, y) \neq 0$:

$$\mu(x, y) f(x, y) dx + \mu(x, y) g(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

μ soll so bestimmt werden, daß die neue Differentialgleichung (2) jetzt exakt ist. Also muß gelten:

$$D_2 (\mu f) \stackrel{!}{=} D_1 (\mu g)$$

Falls dies gilt, heißt μ **integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)**. Oben muß nun die Produktregel angewendet werden, womit dann folgt:

$$(D_2 \mu(x, y)) f(x, y) - (D_1 \mu(x, y)) g(x, y) = \mu(x, y) (D_1 g(x, y) - D_2 f(x, y)) \quad (3)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung. Wir suchen einen Ansatz zur Berechnung von $\mu = \mu(x, y)$. Es sei $\varphi = \varphi(x, y)$ gegeben. Dann suchen wir eine Funktion $H = H(t)$ derart, daß $\mu(x, y) = H(\varphi(x, y))$ ein integrierender Faktor ist. Mittels der Kettenregel ergibt sich dann wieder:

$$D_1\mu(x, y) = H'(\varphi(x, y))D_1\varphi(x, y)$$

$$D_2\mu(x, y) = H'(\varphi(x, y))D_2\varphi(x, y)$$

Gleichung (3) geht nun über in:

$$H'(\varphi(x, y)) = H(\varphi(x, y)) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{D_2\varphi(x, y) \cdot f - D_1\varphi \cdot g(x, y)}$$

Falls diese Funktion nur noch von $\varphi(x, y)$ abhängt mit $w(\varphi(x, y))$, dann hat der Ansatz etwas gebracht.

$$H'(\varphi(x, y)) = H(\varphi(x, y))w(\varphi(x, y))$$

$$H'(t) = H(t)w(t)$$

Es ist eine lineare homogene Differentialgleichung. Diese Methode wollen wir nun an speziellen Beispielen üben:

1.) $\varphi(x, y) = x: \mu(x, y) = H(x)$

$$H'(x) = H(x) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{-g(x, y)}$$

Falls dies nur von x abhängt, dann ist $\mu(x) = H(x)$ ein integrierender Faktor.

2.) $\varphi(x, y) = y$

$$H'(y) = H(y) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{f(x, y)}$$

Dies darf nur von y abhängen.

3.) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$

$$H'(x^2 + y^2) = H(x^2 + y^2) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{2yf(x, y) - 2xg(x, y)}$$

Auch hier das die Funktion nur von $x^2 + y^2$ abhängen, damit $\mu(x) = H(x)$ integrierender Faktor ist.

Beispiel:

Schauen wir uns folgende lineare inhomogene Differentialgleichung an:

$$y' + p(x)y + g(x) = 0$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{(p(x)y + q(x))}_{f(x,y)} dx + \underbrace{1}_{g(x,y)} dy = 0$$

Nun gilt:

$$D_2f(x, y) = p(x)$$

$$D_1g(x, y) = 0$$

Nun ergibt sich mit der obigen Beziehung:

$$\frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{-g} = \frac{-p(x)}{-1} = p(x)$$

$$H'(x) = H(x)p(x)$$

Somit folgt:

$$\mu(x) = H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x p(t) dt\right)$$

Als Übung soll der Rest dieser Aufgabe gelöst werden.

Beispiel:

$$y - (x^2 + y^2 + x) y' = 0$$

$$y dx - (x^2 + y^2 + x) dy = 0$$

$$D_1g(x, y) - D_2f(x, y) = -2x - 1 - 1 = -2(x + 1)$$

Die Differentialgleichung ist somit nicht exakt. Die Fälle (1) und (2) liegen nicht vor.

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

$$H'(y) = H(y) \cdot \frac{-2(x+1)}{2y^2 + 2x(x^2 + y^2 + x)} = -\frac{2(x+1)}{2(x^2 + y^2)(x+1)} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$

Wir haben somit nur eine Abhängigkeit von $x^2 + y^2$; unser Ansatz führt infolgedessen zum Ziel. $\mu(x, y) = H(x^2 + y^2)$ läßt sich aus $H'(t) = H(t) \left(-\frac{1}{t}\right)$ berechnen.

$$H(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Somit folgt also:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$$

Nun müssen wir zu dem entsprechenden Vektorfeld ein Potential bestimmen.

$$D_1h = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$D_2h = -\left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Nach einigen Rechenschritten folgt:

$$h(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y$$

Für die Lösung in impliziter Form folgt dann:

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y = C$$

Schauen wir uns zum Abschluß noch einmal folgendes an:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} f(\xi, \eta) d\xi + g(\xi, \eta) d\eta = 0$$

Falls dieses Integral wegunabhängig ist, dann ist hierdurch die Lösung implizit gegeben.

$$\Leftrightarrow D_2 f(\xi, \eta) = D_1 g(\xi, \eta)$$

$$\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt = 0$$

Die Exaktheit ist also eine andere Formulierung für die Wegunabhängigkeit eines Integrals. Als Vorbereitung zu unserem nächsten Thema wollen wir uns nochmals die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung anschauen:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Dies wird multipliziert mit:

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x p(t) dt\right)$$

Damit folgt dann:

$$(\mu y)'(x) = \mu(x)q(x)$$

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_0)y(x_0) = \int_{x_0}^x \mu(t)q(t) dt$$

Somit folgt:

$y(x) = \underbrace{\frac{y(x_0)}{\mu(x)}}_{\text{Lösung der homogenen Gleichung}} + \underbrace{\frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x \mu(t)g(t) dt}_{\text{Lösung der inhomogenen Gleichung } y_p \text{ mit } y_p(x_0) = 0}$

Es handelt sich um alle Lösungen, falls x_0 beliebig ist. Für $g(x) = 0$ folgt daraus auch die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = \frac{y(x_0)}{\mu(x)} = \frac{C}{\mu(x)} \text{ mit beliebigem } C$$

5.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten die Differentialgleichung $L_y(x) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ mit $x \in I$ und gegebenem p, q und f . Diese Funktionen seien außerdem stetig und beschränkt.

Problem:

Es seien $x_0 \in I$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Gesucht wird $y \in C^2(I)$ mit $L_y(x) = f(x)$ und $x \in I$ Außerdem sei $y(x_0) = \alpha$ und $y'(x_0) = \beta$. Das Problem (P) wird mit $A(f; \alpha, \beta)$ bezeichnet. $y \in A(f; \alpha, \beta)$ soll bedeuten: y löst $A(f; \alpha, \beta)$.

Satz ①:

Das Problem $A(f; \alpha, \beta)$ ist für jedes Tripel von Daten $\{f; \alpha, \beta\}$ eindeutig lösbar.

Folgerung:

Es sei $y \in A(0; 0, 0)$. Dann gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = 0$$

Satz ② (Linearität/Superposititon):

Aus $y_1 \in A(f_1; \alpha_1, \beta_1)$ und $y_2 \in A(f_2; \alpha_2, \beta_2)$ und $C_1 = \text{const.}$, $C_2 = \text{const.}$ folgt:
 $Cy_1 + C_2y_2 \in A(C_1f_1 + C_2f_2; C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2, C_1\beta_1 + C_2\beta_2)$

Wir bezeichnen die Menge aller Lösungen als:

$$\mathcal{L} = \{y \mid Ly = f \text{ auf } I\}$$

Diese Menge nennt man die „allgemeine Lösung“. Die „allgemeine Lösung der homogenen Gleichung“ lautet:

$$\mathcal{L}_H = \{y \mid Ly = 0 \text{ auf } I\}$$

Satz ③:

Es sei $y_p \in \mathcal{L}$ gegeben. Dann gilt $\mathcal{L} = y_o + \mathcal{L}_H$, d.h. genau:

- 1.) Jede Funktion der Form $y_p + y_0$ mit $y_0 \in \mathcal{L}_H$ liegt in \mathcal{L} .
- 2.) Hat man $y \in \mathcal{L}$, so gibt es ein $y_0 \in \mathcal{L}_H$ mit $y = y_p + y_0$.

Begründung:

1.) $L(y_p + y_0) = Ly_p + Ly_0 = f + 0 = f$

2.) $L(y - y_p) = Ly - Ly_p = f - f = 0$

Dies bedeutet, daß $y - y_p = y_0$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

5.4.1 Beschreibung der Lösung

Nun wollen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung \mathcal{L}_H charakterisieren. Mit Satz ① ergibt sich:

1.) $y_{h_1} \in A(0, 1, 0)$ existiert:

$$\begin{aligned} y_{h_1} &\neq 0 \\ y_{h_1}(x_0) &= 1 \\ y'_{h_1}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

2.) $y_{h_2} \in A(0, 0, 1)$ existiert:

$$\begin{aligned} y_{h_2} &\neq 0 \\ y_{h_2} &= 0 \\ y'_{h_2} &= 1 \end{aligned}$$

Kleiner Satz:

y_1, y_2 seien auf I linear unabhängig. Dann folgt aus $C_1 y_{h_1}(x) + C_2 y_{h_2}(x) = 0$, dass $C_1 = C_2 = 0$ ist.

Beweis:

$$C_1 y_{h_1}(x_0) + C_2 y_{h_2}(x_0) = 0 = C_1$$

Wir differenzieren:

$$C_1 y'_{h_1}(x_0) + C_2 y'_{h_2}(x_0) = 0 = -C_2$$

Damit ist die Aussage gezeigt.

Satz ④:

Es sei $\mathcal{L}_H = \{g|y = C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2}; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$. $\{y_{h_1}, y_{h_2}\}$ ist Basis.

Beweis:

1.) $C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2} = \mathcal{L}_H \forall C_1, C_2$

$$L(C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2}) = C_1 L y_{h_1} + C_2 L y_{h_2} = 0$$

2.) $y \in \mathcal{L}_H$. Zu zeigen ist:

$$y = \tilde{C}_1 y_{h_1} + \tilde{C}_2 y_{h_2} \text{ mit passenden } \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$$

$$\tilde{C}_1 = y(x_0), \tilde{C}_2 = y'(x_0)$$

$$y = y(x_0) y_{h_1} + y'(x_0) y_{h_2} \Rightarrow w(x) = y(x) - y(x_0) y_{h_1}(x) - y'(x_0) y_{h_2}(x) \stackrel{!}{=} 0 \forall x$$

$$w \in \mathcal{L}_H; w(x_0) = 0, w'(x_0) = 0$$

$$w \in A(0, 0, 0) \Rightarrow w(x) = 0 \forall x \text{ (Folgerung aus Satz ①)}$$

Alle Lösungen der homogenen Gleichung hat man, wenn man zwei linear unabhängige Lösungen hat, davon sind alle Linearkombinationen zu bilden; y_{h_1} und y_{h_2} leisten dies beispielsweise.

Jede Basis von \mathcal{L}_H heißt **Fundamentalsystem** von L . Beispielsweise bilden y_{h_1} und y_{h_2} ein Fundamentalsystem von L .

5.4.2 Wronski-Matrix/Wronski-Determinante

Es sei $u, v \in C^1(I)$. Dann nennt man folgende Matrix die Wronski-Matrix von u und v :

$$(\mathcal{W}(u, v))(x) = \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

Satz:

Es seien $u, v \in C^1(I)$. $(\mathcal{W}(u, v))(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. Dann sind u, v linear unabhängig auf I . Sind u, v linear abhängig auf I , so ist $w(u, v)(x) = 0 \forall x$.

Beweis:

$$C_1 u(x_0) + C_2 v(x_0) = 0 \forall x \stackrel{!}{\Rightarrow} C_1 = C_2 = 0$$

$$C_1 u'(x_0) + C_2 v'(x_0) = 0 \forall x$$

Dies schreiben wir in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \text{ (siehe HM II)}$$

Satz ⑥:

Es seien $u, v \in \mathcal{L}_H$ und u, v seien auf I linear unabhängig. Dann gilt $\mathcal{W}(u, v)(x) \neq 0 \forall x$.

Beispiel:

Betrachten wir folgende Funktionen:

$$u(x) = x^2, v(x) = x|x| \quad -1 \leq x \leq 1$$

Die Funktionen sind linear unabhängig, wie sich an den Schaubildern erkennen läßt. Dies soll als Übung gezeigt werden durch:

$$\mathcal{W}(u, v)(x) = 0 \forall x$$

u, v können nicht Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2.Ordnung sein.

Widerspruchsbeweis:

Es gibt ein $x_0 \in I$ mit $\mathcal{W}(u, v)(x_0) = 0$. Dann betrachten das Gleichungssystem für α_1, α_2 :

$$\begin{pmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus $\mathcal{W}(u, v)(x_0) = 0$ folgt:

Beweis:

Es sei $u, v \in \mathcal{L}_H$. Dann folgt:

$$u'' = -pu' - qu$$

$$v'' = -pv' - qv$$

Wir leiten eine Differentialgleichung für die Wronski-Determinante her:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, v)'(x) &= (uv' - u'v)'(x) = u'v' - u''v' + uv'' - u''v = u(-pv - qv) - v(-pu' - qu) = \\ &= -p(uv' - vu') = -p(x)\mathcal{W}(u, v)(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}(u, v)'(x) = -p(x)\mathcal{W}(u, v)(x)$$

Für die Lösung folgt:

$$\mathcal{W}(u, v)(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right) = \mathcal{W}(u, v)(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right) \forall x$$

5.5 Lösen des Problems $A(f; \alpha, \beta)$

Wir wollen lösen:

$$Ly(x) = f(x), x \in I; y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$$

Vorbemerkung:

Es seien $u, w \in C^2(I)$.

$$L(u \cdot w)(x) = w''(x)u(x) + w'(x)(2u'(x) + p(x)u(x)) + w(x)Lu(x)$$

Hat man $u \in \mathcal{L}_H$ mit $u \neq 0$, so gilt $L(u, w)(x) = w''(x)u(x) + w'(2u' + p(x)u(x))$.

Satz ⑧:

Es sei $u \in \mathcal{L}_H, u \neq 0$. Dann gilt: Ist w allgemeine Lösung von $w''(x) + w' \left(2 \frac{u'(x)}{u(x)} + p(x) \right) = \frac{f(x)}{u(x)}$ (1), so ist $y(x) = u(x)w(x)$ die allgemeine Lösung von $Ly = f$.

(1) ist lineare homogene Gleichung 1. Ordnung für w . Die Ordnung wurde also reduziert. Da $Cu(x), c \in \mathbb{R}$ ebenfalls $\in \mathcal{L}_H$ ist, heißt dieses Vorgehen auch Variation der Konstanten.

$$\mu(x) = \int_{x_0}^x \left(2 \frac{u'(t)}{u(t)} + p(t) \right) dt = \ln \frac{u^2(x)}{u^2(x_0)} + \int_{x_0}^x p(t) dt = \frac{u^2(x)}{u^2(x_0)} \exp \left(\int_{x_0}^x p(t) dt \right)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit $\mu(x)$:

$$(w'(x)\mu(x))' = \mu(x) \frac{f(x)}{u(x)}$$

Durch Integration von x_0 bis x folgt:

$$w'(x)\mu(x) = w'(x_0) + \int_{x_0}^x \mu(t) \frac{f(t)}{u(t)} dt$$

$$w'(x) = w'(x_0) \frac{1}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x \mu(t) \frac{f(t)}{u(t)} dt$$

$$\int_{x_0}^x ds w'(s) = w(x) - w(x_0) = w(x_0) + w'(x_0) \int_{x_0}^x \frac{dx}{\mu(s)} + \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^s \mu(t) \frac{f(t)}{u(t)} dt \right] \frac{1}{\mu(s)} ds$$

Damit folgt:

$$y(x) = u(x) + w(x) = w(x_0)u(x) + w'(x_0)u(x) \int_{x_0}^x \frac{ds}{\mu(s)} + u(x) \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^s f(t) \frac{\mu(t)}{u(t)} dt \right] \frac{1}{\mu(s)} ds$$

$u(x), u(x) \int_{x_0}^x \frac{ds}{\mu(s)}$ sind linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung:

$$\det \begin{pmatrix} u(x) & u(x) \int_{x_0}^x \frac{ds}{\mu(s)} \\ u'(x) & u'(x) \int_{x_0}^x \frac{dx}{\mu(s)} + u(x) \frac{1}{\mu(x)} \end{pmatrix} = u^2(x) \frac{1}{\mu(x)} \neq 0$$

Suche die Linearkombination von $u(x)$ und $u(x) \int_{x_0}^x \frac{ds}{\mu(s)}$, die das Problem $A(0, 1, 0)$ bzw. $A(0, 0, 1)$, d.h. wie sind $w(x_0)$, $w'(x_0)$ zu wählen? Dann ist $\alpha y_{h_1} + \beta y_{h_2}$ Lösung von $A(0; \alpha, \beta)$.

Beispiele:

$$y'' - y' \cos(x) + y \sin(x) = \sin(x)$$

Die homogene Gleichung lautet:

$$y'' - y' \cos(x) + y \sin(x) = 0$$

Gesucht ist eine Lösung $u = u(x)$. Wir machen folgenden Ansatz:

$$u(x) = \exp(v(x))$$

$$u'(x) = v'(x) \exp(v(x))$$

$$u''(x) = (v'(x)^2 + v''(x)) \exp(v(x))$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$v''(x) + v'(x)^2 - v'(x) \cos(x) + \sin(x) = 0$$

$$v''(x) + \sin(x) + v'(x) (v'(x) - \cos(x)) = 0$$

$$(v' - \cos(x))' + v'(x) (v'(x) \cos(x)) = 0$$

Wähle $v' = \cos(x)$ und $v = \sin(x)$.

$$u(x) = \exp(\sin(x))$$

Dies ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir wählen nun einen anderen Ansatz. Wir suchen $u \in \mathcal{L}_H$ in der Form $u(x) = v(\sin(x))$. Gesucht ist $v = v(t)$ derart, daß $u(x) = v \sin(x)$ Lösung ist.

$$u'(x) = \cos(x) v'(\sin(x))$$

$$u''(x) = \sin(x) v''(\sin(x)) + \cos^2(x) v'(\sin(x))$$

$$\cos^2(x) v''(\sin(x)) - \sin(x) v'(\sin(x)) - \cos^2(x) v'(\sin(x)) + v(\sin(x)) \sin(x) = 0$$

$$(1 - \sin^2(x)) v''(\sin(x)) - \sin(x) v'(\sin(x)) - (1 - \sin^2(x)) v'(\sin(x)) + v(\sin(x)) \sin(x) = 0$$

Wir $\sin(x) = t$ folgt:

$$(1 - t^2) v''(t) - t v'(t) - (1 - t^2) v'(t) + t v(t) = 0$$

$$(1 - t^2) (v''(t) - v'(t)) - t (v'(t) - v(t)) = 0$$

$$(1 - t^2) (v'(t) - v(t))' - t (v'(t) - v(t)) = 0$$

$$v'(t) = v(t) \Rightarrow v(t) = e^t$$

Somit gilt also:

$$u(x) = \exp(\sin(x))$$

Schauen wir uns die inhomogene Gleichung an:

$$y'' - \underbrace{y' \cos(x) + y \sin(x)}_{-(y \cos(x))'} = \sin(x)$$

$$(y' - y \cos(x))' = \sin(x)$$

Durch Integration folgt:

$$y' - y \cos(x) = C_1 - \cos(x)$$

Wir multiplizieren mit dem integrierenden Faktor $\exp(-\sin(x))$.

$$(y \exp(-\sin(x)))' = C_1 \exp(-\sin(x)) - \cos(x) \exp(-\sin(x))$$

$$y(x) \exp(-\sin(x)) = C_2 + C_1 \int_{x_0}^x \exp(-\sin(t)) dt + \exp(-\sin(x))$$

$$y(x) = C_2 \exp(\sin(x)) + C_1 \exp(\sin(x)) \int_{x_0}^x \exp(-\sin(t)) dt + \underbrace{1}_{y_p} \quad C_1, C_2 \text{ beliebig}$$

Beispiel:

$$y''(x) + (1 - x^2) y(x) = 0$$

Ist $y = y(x)$ Lösung, so ist auch $u(x) = y(-x)$ Lösung. Dies soll als Übung gezeigt werden. Es gibt Lösungen, die gerade Funktionen sind und ungerade Funktionen sind. Wir machen folgenden Ansatz:

$$u(x) = v(x^2)$$

Als Übung wäre dann zu zeigen, daß sich durch diesen Ansatz folgende Differentialgleichung ergibt:

$$2t(2v' + v)' + (1 - t)(2v' + v) = 0$$

Ein anderer möglicher Ansatz ist:

$$u(x) = \exp(v(x))$$

$$u''(x) = (v''(x) + v'(x)^2) \exp(v(x))$$

$$v''(x) + v'(x)^2 + (1 - x^2) = 0$$

Durch Anwendung der dritten binomischen Formel resultiert:

$$v''(x) = 1 + (v' - x)(v' + x) = 0$$

$$(v'(x) + x)' + (v' + x)(v' - x) = 0$$

Wähle $v'(x) = -x$, wobei dann folgt:

$$v(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

Dann folgt die Lösung:

$$u(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Es gibt α_1, α_2 mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ als Lösungen. Bilde hiermit die Funktion $y = \alpha_1 u + \alpha_2 v$. Da $u, v \in \mathcal{L}_H$, gilt auch $y \in \mathcal{L}_H$.

$$y(x_0) = \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 v(x_0) = 0$$

$$y'(x_0) = \alpha_1 u'(x_0) + \alpha_2 v'(x_0) = 0$$

$$y \in A(0, 0, 0) \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

Das heißt also:

$$\alpha_1 u(x) + \alpha_2 v(x) = 0$$

u, v sind linear abhängig, was ein Widerspruch darstellt.

Satz 7:

$u, v \in \mathcal{L}_H$. $\mathcal{W}(u, v)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. Dann gilt $\mathcal{W}(u, v)(x) \neq 0 \forall x \in I$.

- 1.) $u, v \in \mathcal{L}_H$ ist linear unabhängig
- 2.) Variation der Konstanten: $y = C_1(x)u + C_2(x)v$
 $C_1(x), C_2(x)$ so bestimmen, daß $Ly = f$ gilt.

Wird das für $f = 0$ durchgeführt, so erhält man eine zweite von u linear unabhängige Lösung v der homogenen Gleichung:

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^x \frac{dt}{\mu(t)}; \mu(t) = u^2(t)$$

$$\mu(t) = u^2(t) \exp \left(\int_{x_0}^t p(\tau) d\tau \right)$$

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{u^2(t)} \exp \left(\int_0^t p(\tau) dt \right)$$

5.6 Potenzreihenansatz

Wir wiederholen das CAUCHY-Produkt aus HM I:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l \right) x^n$$

Wir wollen uns nun mit folgender Differentialgleichung beschäftigen:

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

Wir nehmen an, daß $p(x)$ und $q(x)$ Potenzreihen sind:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$$

Die Reihen konvergieren innerhalb des gemeinsamen Konvergenzradius:

$$|x| < R$$

Wenn man sich beispielsweise mit der Schrödinger-Gleichung beschäftigt, erhält man folgende Differentialgleichungen:

* LAGUERRE-Differentialgleichung:

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

* LEGENDRE-Differentialgleichung:

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y = 0$$

* BESSELSche Differentialgleichung:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y = 0$$

* HERMITESche Differentialgleichung:

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

Sowohl die LEGENDRE- als auch die BESSELSche Differentialgleichungen treten insbesondere bei kugelsymmetrischen Problemen auf.

$$\tilde{L}y = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, |x| < R$$

Gesucht sind Lösungen bei $x = 0$, d.h. für $x > 0$ bzw. $x < 0$. $x = 0$ in der Gleichung oben heißt **Stelle der Bestimmtheit** oder **reguläre singuläre Stelle**.

Beispiel:

Wir betrachten die EULERSche Differentialgleichung:

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, 0 < x < \alpha$$

$$y'' + \frac{3}{2} \frac{1}{x} y' - \frac{1}{3x^2} y = 0, p(x) = \frac{3}{2}, q(x) = -\frac{1}{2}$$

Wir machen folgenden Ansatz:

$$y = x^r, y' = rx^{r-1}, y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Durch Einsetzen geht die Differentialgleichung über in:

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0$$

Durch Auflösen ergibt sich:

$$r_1 = +\frac{1}{2}, r_2 = -1$$

Damit folgt für die allgemeine Lösung:

$$y = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{-1} \text{ wobei } C_1, C_2 \text{ beliebige Konstanten sind}$$

Ein anderer Ansatz wird sein:

$$y(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Es handelt sich um einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz (**Methode von Frobenius**).

$$Ly = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

Hier wird als der Ansatz verwendet:

$$y(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$Ly = x^2 y'' + (p_0 x + p_1 x^2 + p_2 x^3 + \dots) y' + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots) y = 0$$

* Regulärer Fall:

$$p_0 = 0, q_0 = q_1 = 0$$

Damit gilt:

$$y''(x) + \text{Potenzreihe} \cdot y' + \text{Potenzreihe} \cdot y = 0$$

* Singulärer Fall:

$$p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$$

$$y(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\varrho}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \varrho) x^{k+\varrho-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \varrho)(k + \varrho - 1) x^{k+\varrho-2}$$

Mit dem CAUCHY-Produkt ergibt sich nun:

$$q(x)y = x^\varrho \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k q_{k-m} c_m \right) x^k$$

$$xp(x)y' = x^\varrho \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \varrho) x^k \right) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k (m + \varrho) p_{k-m} c_m \right) x^k$$

$$x^2 y'' = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} (k + \varrho)(k + \varrho - 1) c_k x^k$$

Diese Summen werden in die Differentialgleichung $Ly = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y$ eingesetzt:

$$x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k + \varrho)(k + \varrho - 1) c_k + \sum_{m=0}^k [(m + \varrho) p_{k-m} c_m + q_{k-m} c_m] \right] x^k$$

Sie Summanden zu $k = 0$ werden extra geschrieben:

$$x^\varrho \left[\varrho(\varrho - 1) c_0 + \varrho p_0 c_0 + q_0 c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k + \varrho)(k + \varrho - 1) c_k + \sum_{m=0}^k [(m + \varrho) p_{k-m} c_m + q_{k-m} c_m] \right] x^k \right]$$

$$x^\varrho \left[c_0 (\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(((k + \varrho)(k + \varrho - 1) + (k + \varrho) p_0 + q_0) c_k + \sum_{m=0}^{k-1} [(m + \varrho) p_{k-m} + q_{k-m}] c_m \right) x^k \right]$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + p_0 \varrho + q_0$$

Es handelt sich um das charakteristische Polynom für L . Das Ergebnis lautet mit $y(x, \varrho) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$:

$$Ly = x^\varrho c_0 f(\varrho) + x^\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\varrho + k) c_k + \sum_{m=0}^{k-1} [(m + \varrho) p_{k-m} + q_{k-m}] c_m \right] x^k$$

Gesucht sind c_0, c_1, \dots und ϱ derart, daß $Ly = 0$ ist für $x > 0$.

1.) $f(\varrho)c_0 = 0$

2.) $f(\varrho + k)c_k = - \sum_{m=0}^{k-1} [(m + \varrho) p_{k-m} + q_{k-m}] c_m$ mit $k = 1, 2, \dots$

Es handelt sich hierbei um die Rekursionsformeln für c_k . Falls $f(\varrho + k) \neq 0$ für $k = 1, 2, \dots$, dann kann man aus (2) alle c_k berechnen, falls c_0 bekannt ist:

$$c_1 = -\frac{1}{f(\varrho + 1)} \sum_{m=0}^0 [(m + \varrho) p_{1-m} + q_{1-m}] c_m = -\frac{1}{f(\varrho + 1)} (\varrho p_1 + q_1) c_0 = \lambda_1(\varrho)c_0$$

$$c_2 = -\frac{1}{f(\varrho + 2)} \sum_{m=0}^1 [(m + \varrho) p_{2-m} + q_{2-m}] c_m = \lambda_2(\varrho)c_0$$

$$c_k = \lambda_k(\varrho)c_0$$

$\lambda_k(\varrho)$ hängt ab von $p_0, p_1, \dots, p_k, q_0, q_1, \dots, q_k, \varrho$. Damit folgt im Ansatz:

$$y = x^\varrho (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = c_0x^\varrho (1 + \lambda_1x + \lambda_2x^2 + \dots)$$

Es folgt zwingend, daß $c_0 \neq 0$. Damit wählen wir $c_0 = 1$. Aus (1) folgt $f(\varrho) = 0 = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0 = (\varrho^2 - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)$. Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, die man unter anderem auch **determinierende Gleichung** nennt. Wir numerieren die ϱ so, daß $\varrho_1 \geq \varrho_2$. Für komplexe ϱ gilt $\text{Re}(\varrho_1) \geq \text{Re}(\varrho_2)$. Nun muß gelten:

$$f(\varrho_1 + k) = k(\varrho_1 - \varrho_2 + k) \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f(\varrho_2 + k) = k(k - (\varrho_1 - \varrho_2)) \neq 0, \text{ nur falls } \varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$$

* 1.Ergebnis:

Setze $\varrho = \varrho_1$, dann ist $y_1(x) = x^{\varrho_1} c_0 (1 + \lambda_1(\varrho_1)x + \lambda_2(\varrho_1)x^2 + \dots)$ mit $c_0 \neq 0$ eine Lösung zu $Ly = 0$.

$$0 < x < R$$

$$-R < x < 0$$

* Weiteres Vorgehen:

1.) Regulärer Fall:

$$q_0 = q_1 = p_0 = 0$$

2.) Singulärer Fall:

$$\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$$

$$\varrho_1 - \varrho_2 \in \mathbb{N}$$

$$\varrho_1 = \varrho_2$$

Es sind zwei linear unabhängige Lösungen gesucht.