Vorbereitung: Galvanometer

Marcel Köpke
Gruppe 7

17.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Allgemein

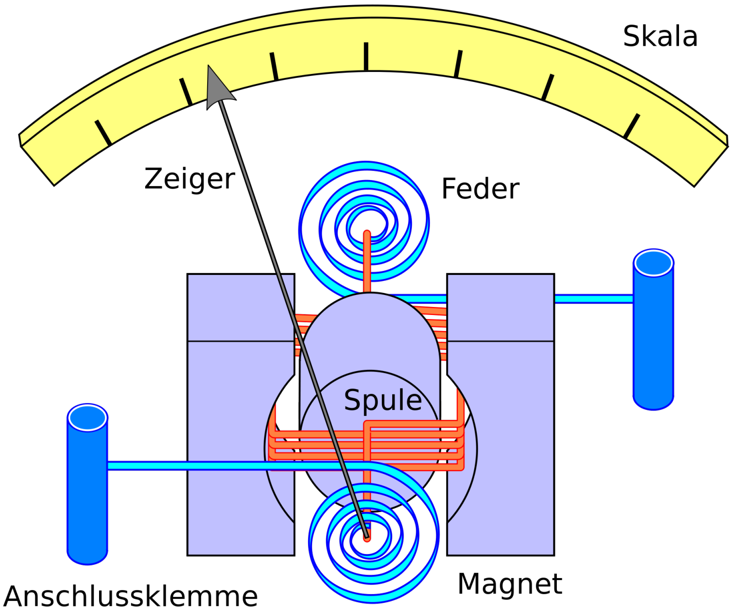

Abbildung 1.1: Galvanometer (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Galvanometer) 17.11.2011

Abbildung 1.1 zeigt die schematische Skizze eines Galvanometers. Ein Galvanometer ist ein Drehspulmessinstrument zur Messung von Strömen. Es besteht, wie der Name schon sagt, aus einer drehbar gelagerten Spule, die bei Stromfluss ein B-Feld hervorruft. Da sich die Spule innerhalb eines Permanentmagneten befindet kann so ein Drehmoment erzeugt werden. Die Lorentzkraft auf die einzelnen Leiterschleifen bewirkt die parallele Ausrichtung des Spulenfeldes zum Permamentfeld. Rückstellfedern (hier zwei) sorgen für ein rückstellendes Drehmoment an der Spule. So kann also die Auslenkung der Spule als Maß für die Stärke des durch sie fließenden Stroms angenommen werden. Die jeweilige Realisierung der Anzeige kann variieren. So wird hier eine Zeigerapparatur dargestellt. Im

Versuch allerdings wird die Auslenkung durch eine optische Vorrichtung angezeigt (Lichtpunkt auf Skala). Auch werden meist die Rückstellfedern direkt als Anschlussklemmen verwendet.

1.2 Theorie

Die Rückstellfedern bewirken ein Drehmoment, welches proportional zur Auslenkung φ ist:

$$M_r = -D\varphi$$

Dabei ist D die Winkelrichtgröße bzw. das Richtmoment der Feder(n).

Die Apparatur ist zwar frei gelagert erfährt aber dennoch eine gewisse Dämpfung durch Luftreibung oder mechanischem Wärmeverlust an den sich bewegenden Federn. Es ist praktikabel hier von Stokes'scher Dämpfung auszugehen. Damit wird ergibt sich ein Dämpfungsmoment proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$:

$$M_d = -\varrho\dot{\varphi}$$

Der Strom durch die Spule ruft ein B-Feld hervor, welches wiederrum aufgrund der Anwesenheit des Permanentmagneten ein auslenkendes Drehmoment verursacht:

$$M_a = nABI = GI$$

G ist dabei die sogenannte dynamische Galvanometerkonstante. Sie berechnet sich aus der Windungzahl n, dem Spulenquerschnitt A und dem anliegenden Magnetfeld B. Der Strom I ist dabei der Gesamtstrom durch die Spule. Er kommt durch die von außen angelegte Spannung U_a und die durch die Drehung der Spule im Magnetfeld induzierte Spannung U_i zustande:

- $U_a = (R_G + R_a) \cdot I_a$
  $\Rightarrow I_a = \frac{U_a}{R_G+R_a}$
  mit R_G dem Widerstand des Galvanometers und R_a dem Widerstand der angeschlossenen äußeren Apparatur.

- $U_i = -n \cdot \dot{\Phi} = -nAB\dot{\varphi} = -G\dot{\varphi}$
  $\Rightarrow I_i = \frac{U_i}{R_G+R_a} = -\frac{G}{R_G+R_a}\dot{\varphi}$

  $\Rightarrow I = I_a + I_i = \frac{U_a}{R_G+R_a} - \frac{G}{R_G+R_a}\dot{\varphi}$

Damit ergibts sich M_a zu:

$$M_a = GI_a - \frac{G^2}{R_G + R_a}\dot{\varphi}$$

Mit diesen Drehmomenten kann nun die Differentialgleichung des Galvanometers aufgestellt werden:

$$\Theta\ddot{\varphi} \quad = \quad M_{ges} = M_r + M_d + M_a$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{1}{\Theta}(\varrho + \frac{G^2}{R_G + R_a})\dot{\varphi} + \frac{D}{\Theta}\varphi = \frac{GI_a}{\Theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = c$$

mit

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2\Theta}(\varrho + \frac{G^2}{R_G + R_a}) \text{ der Dämpfungskonstante} \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \text{ der Eigenkreisfrequenz} \\
c &= \frac{GI_a}{\Theta} \text{ der äußeren Anregung} \\
&\text{und} \\
\Theta &\mathrel{\hat{=}} \text{dem Trägheitsmoment der Spule}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Differentialgleichung der eines angeregten harmonischen Oszillators gleicht. Bei der homogenen Lösung müssen 3 Fälle unterschieden werden:

- Schwingfall ($\gamma < \omega_0$):

$$\begin{aligned}
\varphi &= e^{-\gamma t} \cdot A \cdot \cos(\omega t + \psi) \\
\text{mit} \quad & \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}
\end{aligned}$$

  Die Schwingung ist schwach gedämpft, sodass mehrmals die Ruhelage durchlaufen werden kann. Die Amplitude A nimmt dabei exponentiell mit der Zeit ab.

- Aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$):

$$\varphi = (A + Bt) \cdot e^{-\gamma t}$$

  Es findet keine Schwingung statt! Die Ruhelage wird nicht durchlaufen und das System findet sich am schnellsten (im Vergleich zu den anderen beiden Fällen) in dieser ein.

- Kriechfall ($\gamma > \omega_0$):

$$\begin{aligned}
\varphi &= e^{-\gamma t} \cdot A \cdot \cosh(\omega t) \\
\text{mit} \quad & \omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

  Der Verlauf ähnelt dem des Aperiodischen Grenzfalls, jedoch kann hier die Ruhelage noch einmal durchlaufen werden.

Die partikuläre Lösung der DGL ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{c}{\omega_0^2} = \frac{GI_a}{D}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist dann eine Superposition aus der partikulören und einer der 3 homogenen Lösungen!

Wie man sieht ist das Galvanometer schwingungsfähig. Durch anlegen eines äußeren Stroms $I_a \neq 0\mathrm{A}$ wird die Spule ausgelenkt (siehe partikuläre Lösung) und beginnt dann, z.B. im Fall von schwacher Dämpfung, eine Schwingung um die neue Gleichgewichtslage $\varphi_0 = \frac{GI_a}{D}$. Um den Strom I_a zu bestimmen ist die Kenntnis dieser neuen Gleichgewichtslage nötig. Man wartet also bis die Schwingung durch Dämpfung ausgelaufen ist und mist dann φ_0.

2 Versuche

2.1 Vorexperimente

Hier sollen bestimmte Fehlerquellen in der Messung und die Empfindlichkeit des Galvanometers verdeutlicht werden:

- Durch das Anfassen der Galvanometer-Anschlüsse sollte ein Strom messbar sein, der durch winzige elektrische Ströme im menschlichen Körper verursacht wird.
- Schließt man einen Drahtdrehwiderstand an das Galvanometer an, so sollte beim Drehen ein Strom messbar sein. Dieser kommt durch Reibung und damit verbundene Ladungstrennung zu stande.
- Vergleicht man die Ruhelagen bei offenem und (mit dem Drahtdrehwiderstand) kurzgeschlossenem Galvanometer so sollte kein Unterschied feststellbar sein. Jedoch kann es beim An- und Abschließen des Widerstands zu kurzzeiten Ladungsverschiebungen und damit zum Ausschlag des Galvanometers kommen.

2.2 statische Messungen

2.2.1 Schaltung 2

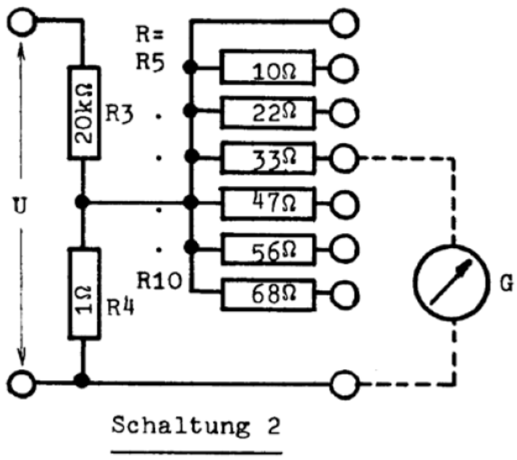

Abbildung 2.1: Schaltung 2 (Quelle: Aufgabenblatt)

In diesem Versuch soll der Galvanometerausschlag α in Abhängigkeit vom Vorwiderstand R gemessen werden. Dafür wird die oben gezeigte Schaltung verwendet. Für den Gesamtwiderstand gilt dann:

$$R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R+R_G}} + R_3 = \frac{R_4(R+R_G)}{R_4+R+R_G} + R_3 = \frac{(R+R_G)(R_3+R_4)+R_3R_4}{R_4+R+R_G}$$

Da $R_4 \ll R_3$ gilt in guter Näherung:

$$R_{ges} \approx \frac{R_3(R_4+R+R_G)}{R_4+R+R_G}$$

Damit ergibt sich für den Gesamtstrom:

$$\begin{aligned} I_{ges} &= \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U(R_4+R+R_G)}{R_3(R_4+R+R_G)} \\ I_{ges} &= I_a + I_{R_4} \end{aligned}$$

Nun gilt aber für die Spannung an R_4:

$$U_{R_4} = R_4 \cdot I_{R_4} = (R+R_G)I_a = U_{R+R_G}$$

Damit folgt für den Strom durch das Galvanometer:

$$I_a = \frac{UR_4}{R_3(R_4+R+R_G)}$$

Für große Zeiten spielt der homogene Anteil der Lösung der DGL keine Rolle. Es gilt also:

$$\varphi = \frac{G}{D} \cdot I_a$$

Je nachdem wie das (optische) Galvanometer realisiert ist (ohne oder mit Umlenkspiegel) gilt entweder $\alpha = \varphi$ oder $\alpha = 2\varphi$. Wir nehmen nun allgmein $\alpha = z\varphi$ mit z beliebig an. Dann folgt:

$$\alpha = z\frac{G}{D}I_a$$

Die statische Stromempfindlichkeit ist damit:

$$C_I = z\frac{G}{D}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{C_I I_a} = \frac{R_3(R_4+R+R_G)}{C_I U R_4} \\ &= \frac{R_3}{C_I U R_4} R + \frac{R_3(R_4+R_G)}{C_I U R_4} \\ &= a \cdot R + b \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_3}{C_I U R_4} \\ b &= \frac{R_3(R_4+R_G)}{C_I U R_4} \end{aligned}$$

Man erhält also einen linearen Zusammenhang zwischen $\frac{1}{\alpha}$ und R. Durch die Messungen lassen sich a und b mit Hilfe von linearer Regression bestimmen. Damit erhält man schlussendlich:

$$\begin{aligned} R_G &= \frac{b}{a} - R_4 \\ C_I &= \frac{R_3}{aUR_4} \end{aligned}$$

2.2.2 Schaltung 3

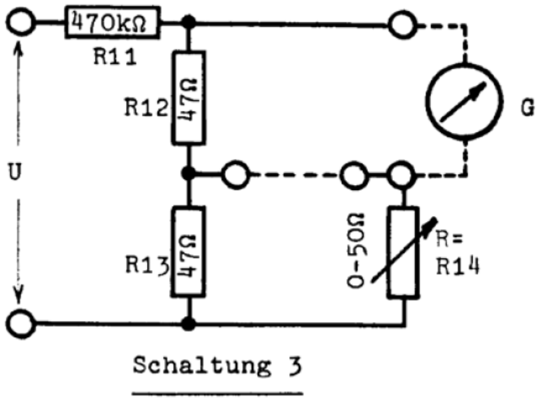

Abbildung 2.2: Schaltung 3 (Quelle: Aufgabenblatt)

Die Schaltung zeigt eine Wheatstone'sche Brückenschaltung. Mit ihr lassen sich Widerstände stromlos messen.

Bei offener Brücke ergibt sich gerade Schaltung 2 wobei jetzt eben $R_3 \mapsto R_{11}$ und $R_4 \mapsto R_{12} + R_{13} = 2R_{12}$ gilt. Die Geradengleichung lautet dann also:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_{11}}{C_I U 2R_{12}} R + \frac{R_{11}(2R_{12} + R_G)}{C_I U 2R_{12}}$$

Bei geschlossener Brücke gilt:

$$I_{ges} = I_{R_{11}} = \frac{U_{R_{11}}}{R_{11}} = I_{R_{12}} + I_a$$

An R_{12} und R_G liegt die gleiche Spannung an:

$$U_{R_{12}} = R_{12} I_{R_{12}} = R_G I_a = U_G$$

Nimmt man nun noch an, dass $U_{R_{11}} \approx U$ gilt da $R_{11} \gg R_{12}$, R_{13}, R, dann folgt:

$$I_a = \frac{R_{12} U}{R_{11}(R_G + R_{12})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{R_{11}(R_G + R_{12})}{R_{12} U C_I}$$

Gleichsetzen mit der «offenen» Gerade ergibt:

$$R = R_G$$

Der Schnittpunkt ergibt also gerade den Galvanometerwiderstand. Außerdem ist die geschlossene Brücke an dieser Stelle abgeglichen.

2.2.3 Schaltung 4

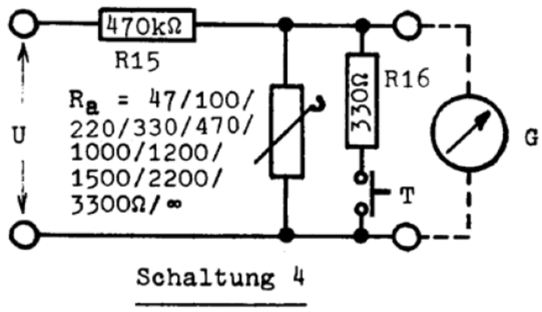

Abbildung 2.3: Schaltung 4

Für diesen Versuch sei $R_a = \infty$, d.h. die Leitung von und nach R_a sei nicht vorhanden. Wir messen nun die Spannungsabhänigkeit von α. Der Schalter T bei R_{16} sein nicht geschlossen. Dann folgt:

$$R_{ges} = R_{15} + R_G$$

$$\Rightarrow I_{ges} = I_a = \frac{U}{R_{15} + R_G} \approx \frac{U}{R_{15}}$$

Bei der Näherung wurde ausgenutzt, dass $R_{15} \gg R_G$. Da α und I_a linear über C_I zusammenhängen, ergibt die Steigung der durch die Messung ermittelten Geraden $\alpha\,(I_a)$ die Stromempfindlichkeit C_I.

2.3 dynamische Messungen

In diesem Versuch sollen bestimmte Größen des Galvanometers bzw. der Galvanometerschwingung ermittelt werden. Dafür wird Schaltung 4 (siehe oben) verwendet. Der Schalter T bleibt auch hier während der tatsächlichen Messung offen. Die Messungen werden jeweils für verschieden Widerstände R_a (von 1kΩ bis ∞) durchgeführt.

Tatsächlich gemessen wird nur die Periodendauer T und das Dämpfungsverhältnis k mit

$$k = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}$$

wobei die α_i die Amplituden der Auslenkung sind.

Damit lassen sich nun folgende Größen ermitteln:

- Abklingkonstante β_{R_a}:
  Es gilt: $k = e^{\beta_{R_a} T} \iff \beta_{R_a} = \frac{\ln(k)}{T}$
  Außerdem gilt:$\beta_{R_a} = \frac{1}{2\Theta}(\varrho + \frac{G^2}{R_G+R_a}) = \beta_\infty + \frac{G^2}{2\Theta(R_G+R_a)}$
  Damit folgt dann: $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1} = \frac{2\Theta}{G^2} R_a + \frac{2\Theta R_G}{G^2} = \widetilde{a} \cdot R_a + \widetilde{b}$
  Es besteht also ein linearer Zusammenhang (Gerade) zwischen R_a und $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1}$.

- Eigenfrequenz ω_0 des Galvanometers:
  Es gilt: $\omega_0 = \sqrt{(\frac{2\pi}{T_\infty})^2 + \beta_\infty^2} = \sqrt{\omega_\infty^2 + \beta_\infty^2}$

- Außenwiderstand R_a bei Grenzdämpfung:
  Gesucht ist also R_a bei $\beta_{R_a} = \omega_0$. Man kann den Widerstand einfach durch ablesen an der oben ermittelten Geraden bei $y = (\omega_0 - \beta_\infty)^{-1}$ bestimmen.

- Galvanometer-Kenngrößen G, Θ und D:
  Diese Größen ermitteln sich durch:

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{\widetilde{a}\omega_0^2 C_I} \\ \Theta &= \frac{2}{\widetilde{a}\omega_0^4 C_I^2} \\ D &= \frac{2}{\widetilde{a}\omega_0^2 C_I^2} \end{aligned}$$

  Dabei muss darauf geachtet werden, dass (falls nötig) C_I von Metern/Amper in Bogenmaß/Amper umgerechnet wird.

2.4 Stromstöße

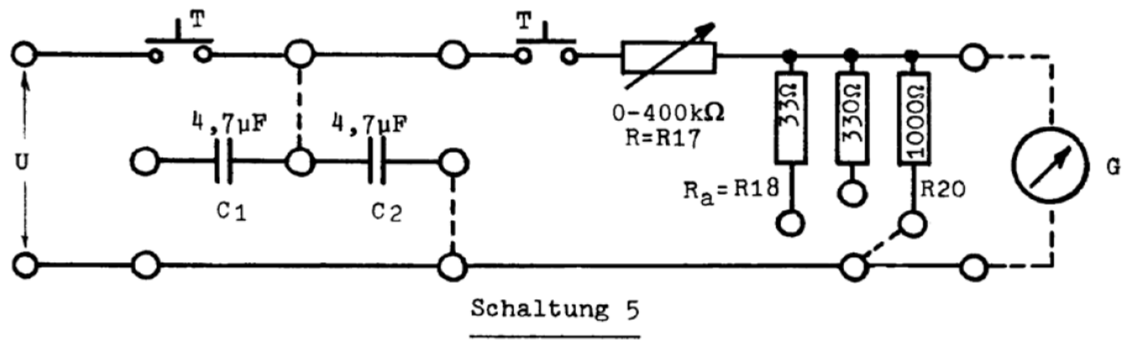

Abbildung 2.4: Schaltung 5

In diesem Versuch wird das Verhalten des Galvanometers bei kurzen (starken) Stromstößen untersucht. Dazu wird Schaltung 5 verwendet, in welcher der Stromstoß durch die Entladung eines Kondensators realisiert wird. Da ein Kondensator sich jedoch (idealisiert) nie vollständig entlädt wird als Stromstoßdauer die Zeit $T_Q = 3RC$ verwendet, bei der 95% der Ladung vom Kondensator abgeflossen ist.

2.4.1 Stromstoßempfindlichkeit

Die Messung wird für verschiedene Widerstände R_a durchgeführt. Dadruch können verschiedene Bereiche der Dämfung erfasst werden:

- $R_a = \infty$: ballistische Empfindlichkeit bei minimaler Dämpfung
- $R_a = 1\text{k}\Omega$: ballistische Empfindlichkeit im Schwingfall
- $R_a = 330\Omega$: ballistsiche Empfindlichkeit nahe der Grenzdämpfung
- $R_a = 33\Omega$: fluxmetrische Empfindlichkeit im Kriechfall

Die Stromstoßempfindlichkeit ist definiert als das Verhältnis zwischen der Auslenkung der Galvanometers und die durch das Galvanometer geflossene Stoß-Ladung. Dabei muss beachtet werden, dass nicht die komplette Ladung durch das Galvanometer abfließt. Ein Teil kann nämlich durch den Widerstand R_a abfließen! Es folgt damit also:

$$C_b = \frac{\alpha}{Q_G} = \frac{\alpha}{CU_G} = \frac{R_a + R_G}{R_G} \cdot \frac{\alpha}{CU}$$

2.4.2 Theoretische Stromstoßempfindlichkeit

Integriert man die DGL des Galvanometers nach der Zeit so folgt:

$$\dot{\varphi} + 2\gamma\varphi + \omega_0^2 \int_0^{T_Q} \varphi\,(t)\,dt = \frac{G}{\Theta} \cdot Q_G$$

Für einen Stromstoß gilt zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(0) &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

Damit wird die DGL zu:

$$\omega_0^2 \int_0^{T_Q} \varphi\,(t)\,dt = \frac{G}{\Theta} \cdot Q_G$$

Dies liefert die Maximale Auslenkung $\varphi_{max} = \frac{\alpha_{max}}{z}$ für die verschiedenen Dämpfungsarten:

- Schwingfall:

$$\alpha_{max} \approx z\frac{GQ}{\Theta\omega_0}$$
$$\Rightarrow C_b = z\frac{G}{\Theta\omega_0}$$

- aperiodischer Grenzfall:

$$\alpha_{max} = z\frac{GQ}{\Theta\omega_0 e}$$
$$\Rightarrow C_b = z\frac{G}{\Theta\omega_0 e}$$

- Kriechfall:

$$\alpha_{max} \approx z\frac{GQ}{\Theta 2\gamma} \approx z\frac{R_G + R_a}{G}Q$$
$$\Rightarrow C_b = z\frac{R_G + R_a}{G}$$

2.4.3 Abhängigkeit von T_Q

In den Formeln für die Stoßempfindleichkeit tritt keine Abhängigkeit von T_Q auf. Dies ist nur dann der Fall, wenn $T_Q \ll T$ angenommen werden darf. Durch erhöhen der Stromstoß-Zeit ($T_Q = 3RC$) kann die Abhängigkeit von T_Q jedoch experimentell nachgewiesen werden. Dies kann zum Beispiel durch erhöhen des Widerstandes geschehen.

2.5 Fragen

2.5.1 Warum kann R_G nicht mit einem üblichen Ohmmeter gemessen werden?

Antwort: Das Galvanometer ist äußerst empfindich gegenüber zu hohen Stromstärken und kann dadurch leicht beschädigt werden. Ein «normales» Ohmmeter legt eine Spannung an den Widerstand an und mist den Strom, der dadurch entsteht. Es kann also nicht gewährleistet werden, dass das Galvanometer dadurch unbeschädigt bliebe.

2.5.2 Wozu könnte wohl der in Schaltung 4 zum Galvanometer parallelschaltbare $300\Omega-$Widerstand dienen?

Antwort: Wird $R_a = \infty$ gewählt so ist die Dämpfung am Galvanometer minimal. Der Schwingvorgang würde sehr lange andauern. Durch zuschalten des Widertands kann $R_a = 330\Omega$ gesetzt werden. Dadurch stellt sich eine Dämpfung ein, die nahe am aperiodischen Grenzfall liegt. Das Galvanometer kehrt so also am schnellsten in die Gleichgewichtslage zurück!

2.5.3 Wie ergibt sich die statische Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers?

Antwort: Über das Ohm'sche Gesetz. Es gilt $I_a = \frac{U_a}{R_G}$. Damit folgt: $\alpha = \frac{G}{zD} I_a = \frac{G}{zDR_G} U_a = C_U U_a$. Also ist $C_U = \frac{G}{zDR_G} = \frac{C_I}{R_G}$.

2.5.4 Wieso ergibt sich bei Aufgabe 2.2 R_G als Schnittpunkt-R?

Antwort: siehe Abschnitt 2.2.2 auf Seite 9.

2.5.5 Welchen Sinn haben ballistsiche Messungen?

Bei mechanischen ballistischen Messungen kann man anhand der Auslenkung Rückschlüsse auf Eigenschaften des «Geschosses», wie zum Beispiel seine kinetische Energie und bei bekannter Masse seine Geschwindigkeit, machen. Ähnlich kann dies auch hier durchgeführt werden. Ein Stromstoß ist verantwortlich für eine gewissen Auslenkung des Galvanometers. Aus dieser kann man Rückschlüsse auf die Gesamtladung des Stromstoßes ziehen.