

**Versuche P1-12,22,22**

# **Resonanz**

## **Versuchsvorbereitung**

Thomas Keck, Gruppe: Mo-3  
Karlsruhe Institut für Technologie, Bachelor Physik

Versuchstag: 20.12.2010

## 1 Vorwort

Im Praktikumsversuch „Resonanz“ geht es um freie und erzwungene Schwingungen. Das Resonanzverhalten eines Drehpendels und eines Serienschwingkreises werden dabei bezüglich Amplitude und Phase untersucht. Zur Messergebniserfassung wird „CASSY“ verwendet werden. Der Fokus dieser Versuchsvorbereitung liegt auf der Herleitung der benötigten funktionalen Zusammenhänge, und der Bestimmung von benötigten unbekanntenen Größen die sich aus den Versuchsaufbauten ergeben.

## 2 Gedämpfter harmonische Oszillator

Der gedämpfte harmonische Oszillator kommt in der Physik sehr häufig vor, da für kleine Auslenkungen die entstehende Rückstellkraft in vielen Systemen in erster Näherung als linear angenommen werden kann. Desweiteren wird eine Dämpfungskraft linear zur Änderung der Auslenkung berücksichtigt.

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (1)$$

Durch einen Exponentialansatz kann diese DGL gelöst werden, es ergibt sich dabei eine Fallunterscheidung:

- Schwingfall:  $\beta < \omega_0$

$$x(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Es handelt sich dabei um eine exponentiell abfallende Schwingung.  $\omega_0$  bezeichnet dabei die Kreisfrequenz der Schwingung. Die Dämpfungskonstante  $\beta$  ergibt sich deshalb aus dem Logarithmus des Verhältnisses zweier Auslenkungen im Abstand einer Periodendauer  $T$ :

$$\beta = \frac{1}{T} \cdot \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \quad (2)$$

Der Kehrwert der Dämpfungskonstanten wird auch als Relaxationszeit bezeichnet, die Zeit die die Schwingung braucht um auf  $\frac{1}{e}$  der ursprünglichen Amplitude abzufallen.

- Kriechfall:  $\beta > \omega_0$

$$x(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot A \cdot \cosh(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Es findet keine Schwingung statt, die Auslenkung geht langsam zurück in die Ruhelage

- Aperiodischer Grenzfall:  $\beta = \omega_0$

$$x(t) = A \cdot (1 + B \cdot t) \cdot e^{-\beta \cdot t}$$

Für diesen Fall findet ebenfalls keine Schwingung statt, die Dämpfung ist in diesem Fall insofern optimal, dass das System auf dem schnellsten Weg zurück in die Ruhelage kommt.

Für die im Praktikum betrachteten Systeme: Drehpendel und Serienschwingkreis ergibt sich das obige DGL jeweils wie folgt:

**Drehpendel** Gemessen wird der Winkel  $\phi$ , das Trägheitsmoment  $\Theta$  ist dabei der Widerstand gegen die Beschleunigung, die Winkelrichtgröße  $D^*$  gibt die Stärke der Rückstellkraft an. Die Dämpfungskonstante  $\beta = \frac{\gamma}{2 \cdot \Theta}$  bleibt zunächst unbestimmt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Theta \ddot{\phi} &= -D^* \cdot \phi - \gamma \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} &= -\frac{D^*}{\Theta} \cdot \phi - \frac{\gamma}{\Theta} \dot{\phi} \end{aligned}$$

**Serienschwingkreis** Beim Serienschwingkreis wird der Strom  $I$  betrachtet, der durch das System fließt. Der Kondensator mit der Kapazität  $C$  lädt sich mit dem fließenden Strom immer weiter auf  $C = \frac{\int I \cdot dt}{U_C}$ , und erzeugt eine Gegenspannung  $U_C$ . Die Induktivität  $L$  der Spule hingegen erzeugt eine Induktionsspannung entgegen der Stromänderung  $U_L = -L \cdot \dot{I}$ . Der ohmsche Widerstand  $R$  des Schwingkreises wird wie eine Dämpfung für den fließenden Strom und erzeugt einen Spannungsabfall nach dem ohmschen Gesetz:  $U_R = R \cdot I$ . Mithilfe der Kirchhoffschen Maschenregel, die besagt dass die Summe aller Spannungsabfälle Null ergeben muss, ergibt sich nach zeitlicher Differentiation die DGL für den Serienschwingkreis:

$$\begin{aligned} L \ddot{I} &= -\frac{1}{C} \cdot I - R \cdot \dot{I} \\ \ddot{I} &= -\frac{1}{LC} \cdot I - R \cdot \dot{I} \end{aligned}$$

Für die Kreisfrequenz ergibt sich  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ .

### 3 Periodisch getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

Wird der Auslenkung  $x$  des Systems eine äußere periodische Kraft angelegt  $F = k \cdot \cos(\Omega \cdot t)$ , so wird die homogene DGL des gedämpften harmonischen Oszillators, um eine Inhomogenität erweitert. Die homogene Lösung bleibt die gleiche wie im oben beschriebenen Fall des

gedämpften harmonischen Oszillators, bei der Untersuchung des Resonanzverhaltens ist außerdem nur der Schwingfall von Interesse. Über eine Fouriertransformation ergibt sich eine partikuläre Lösung des Systems.

Nach einer gewissen Einschwingzeit wird der exponentiell gedämpfte homogene Teil jedoch verschwinden, sodass im folgenden nur noch die partikuläre Lösung von Interesse ist. Das System schwingt dabei mit der Frequenz der anregenden Kraft, ist jedoch zu dieser Phasenverschoben, die Amplitude hängt stark von der Nähe der anregenden Frequenz  $\omega$  zur Resonanzfrequenz des freien gedämpften harmonischen Oszillators  $\omega_0$  ab.

$$x_{part}(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi)$$

$$A = \frac{k}{\sqrt{4 \cdot \Omega^2 \cdot \beta + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}$$

$$\psi = \arctan - \left( \frac{2 \cdot \beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

Die maximale Amplitude wird dabei bei  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  erreicht. Je nach Stärke der Dämpfung nimmt die Energie des Systems bei jeder Schwingung um einen Faktor ab, ein Maß für den Energieverlust pro Schwingung ist der Gütefaktor des System  $Q = \frac{\omega_0}{2 \cdot \beta}$ , die Breite der Resonanzkurve beträgt  $\Delta\omega = 2 \cdot \beta = \frac{\omega_0}{Q}$ .

Entsprechende Schaubilder zur Resonanzkurve (Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz der anregenden Kraft) und zur Phasenverschiebung (Phasenverschiebung zwischen Schwingung und anregender Kraft) stehen bereits in der Vorbereitungshilfe.

## 4 Aufgaben

### 4.1 Drehpendel, freie Schwingungen

Für das Trägheitsmoment eines Drehpendels kann man das Trägheitsmoment eines Zylinders annehmen:

$$\Theta = m \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \quad (3)$$

Die Speichen und das Getriebe wird dabei vernachlässigt, der Drehkörper besteht ihm wesentlichen aus einem dünnen Zylinder mit  $r_1 = 0.075\text{m}$ ,  $r_2 = 0.095\text{m}$ ,  $d = 0.002\text{m}$  und  $\rho = 8.96 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Das Trägheitsmoment beträgt also:

$$\Theta = m \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \rho \cdot d \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 \quad (4)$$

Ohne Wirbelstrombremse wird es dennoch im System Reibungskräfte geben. Diese sind im Gegensatz zur Dämpfung unabhängig von der Geschwindigkeit hängen jedoch von der der Amplitude der Schwingung ab, in erster Näherung kann man diese Kräfte als lineare Abnahme um einen Betrag  $\Delta A$  pro Schwingung beschreiben.

Diese lineare Abnahme kann durch eine Gerade beschrieben werden:  $A(t) = A_0 - \frac{t}{T} \cdot \Delta A$  um den Parameter  $\Delta A$  zu bestimmen muss diese Gerade an die Messdaten angepasst werden.

## 4.2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Bei verschiedenen Strömen  $I_B$  durch die Wirbelstrombremse wird der Winkel über der Zeit gemessen. Die Dämpfungskonstante kann wie in der vorherigen Aufgabe ermittelt werden, indem die oben hergeleitete Schwingungsfunktion an die Messdaten angepasst wird.

Weiterhin kann  $\beta$  aus dem Dämpfungsverhältnis  $k$  gewonnen werden.

$$\beta = \frac{1}{T} \cdot \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \quad (5)$$

Die oben hergeleitete Formel ergibt hier direkt  $\beta$ , das Dämpfungsverhältnis entspricht  $k = \frac{x(t)}{x(t+T)}$ .

Da die Dämpfung in einem frei schwingenden System kaum Einfluss auf die Kreisfrequenz des Systems besitzt:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  wird man auch keine  $I_B$  Abhängigkeit der Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  finden.

Die Dämpfung der Wirbelstrombremse ist gegeben durch deren Leistung  $P$ , die Dämpfung hängt deshalb quadratisch vom fließende Strom  $I$  ab, der fließende Strom hängt wiederum linear von dem durch die Spule fließenden Strom  $I_B$  ab.

## 4.3 Messung der Winkelrichtgröße $D^*$

Um die Winkelrichtgröße experimentell zu bestimmen, wird die Periodendauer  $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$  bestimmt. In einer Zweiten Messung wird ein Gewicht am Pendel angebracht, welches das Trägheitsmoment um  $\Theta_2 = m \cdot r^2$  erhöht, wieder kann die Periodendauer gemessen werden:  $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta + \Theta_2}{D^*}}$ . Aus der Differenz dieser beiden bekannten Zeiten kann nun die Winkelrichtgröße des Systems ermittelt werden:

$$D^* = \frac{4\pi^2\Theta_2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (6)$$

Das Trägheitsmoment  $\Theta$  kann nun außerdem mit der obigen Formel ermittelt werden, da  $D^*$  ja nun bekannt ist:

$$\Theta = D^* \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \quad (7)$$

Im vorliegenden Versuch wird jedoch ein statisches Verfahren zur Bestimmung der Winkelrichtgröße gewählt werden, die Winkelrichtgröße ist dann einfach definiert, also das Drehmoment pro Winkelauslenkung:

$$D^* = \frac{D}{\varphi} \quad (8)$$

Das Drehmoment wird dabei durch ein kleines Gewicht erzeugt, welches mit seiner Gewichtskraft am äußeren Rand des Drehpendel angreift.

#### 4.4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Die Messung kann wie in der Aufgabenstellung beschrieben durchgeführt werden. Die Gütebestimmung erfolgt über die Breite der Resonanzkurve  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ , wobei  $\Delta\omega$  der Abstand der beiden Punkte links und rechts der Resonanzspitze ist welche eine Amplitude von  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  des Peaks besitzen.

#### 4.5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

Die Messung kann direkt wie in der Aufgabenstellung angegeben durchgeführt werden, alle für die Bewegungsgleichung benötigten Formeln wurde bereits oben im Kapitel über erzwungene Schwingungen hergeleitet.

Die theoretisch vorhergesagte Resonanzfrequenz (bei vernachlässigtem ohmschen Widerstand) beträgt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8.3 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}} \quad (9)$$

**Impedanz** Nach der Vorbereitungshilfe ist die Impedanz gegeben durch:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R_p^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{R_p^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

**Güte des Schwingkreises aus der Breite der Resonanzkurve** Analog zum Drehpendel lässt sich die Güte des Schwingkreises aus der Breite der Resonanzkurve ermitteln. Formel:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

**Güte des Schwingkreises aus der Spannungsüberhöhung an Spule und Kondensator** Im Resonanzfall ( $\omega = \omega_0$ ) tritt an der Spule und am Kondensator eine Spannungsüberhöhung  $|U_L(\omega_0)|$  bzw.  $|U_C(\omega_0)|$  auf, für die gilt:

$$|U_L(\omega_0)| = \omega_0 \cdot \frac{L}{R} \cdot U_0 = U_0 \cdot Q$$

$$|U_C(\omega_0)| = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{1}{R} \cdot U_0 = U_0 \cdot Q$$

Durch Messen der Spannungsüberhöhung an Spule bzw. Kondensator lässt sich dann die Güte des Schwingkreises  $Q$  bestimmen:

$$Q = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0}$$

bzw.  $Q = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0}$

**Phasenverschiebung des Schwingkreises** Die Formel für die Bestimmung der Phasenverschiebung  $\psi$  des Schwingkreises wird in [Vorbereitungshilfe] angegeben:

$$\psi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

## **Literatur**

[Aufgabenstellung] Aufgabenstellung der Versuche P1-12,22,22

[Vorbereitungshilfe] Vorbereitungshilfe zu den Versuchen P1-12,22,22