Vorbereitung: Resonanz

Marcel Köpke
Gruppe 7

09.11.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Freier Oszillator

Ein freier (ungedämpfter) Schwinger kann durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

beschrieben werden. Die Lösung ist gegeben durch:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Dabei geben x_0 die maximale Amplitude und φ eine Phasenverschiebung an. Beide begeben sich aus den Anfangsbedinungen. ω_0 wird Eigenfrequenz des Oszillators genannt.

1.2 Gedämpfter Oszillator

Der gedämpfte Oszillator wird durch eine im Vergleich zum freien Oszillator leicht abgeänderte Differentialgleichung beschrieben. Dabei wird ein zusätzlicher Dämpfungsterm γ eingeführt:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung kann dann für 3 Fälle angegeben werden:

- Schwingfall ($\gamma < \omega_0$):
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \cdot x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ & \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$
- Aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$):
$$x(t) = a \cdot e^{-\gamma t} + b \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$
- Kriechfall ($\gamma > \omega_0$):
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \cdot x_0 \cosh(\omega t) \\ & \text{mit } \omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

1.3 Oszillator mit erzwungener Schwingung

Ein Oszillator kann durch äußeres Einwirken zu einer bestimmten Schwingung «gezwungen» werden. Die Differentialgleichung erhält dann folgende From:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Für eine äußere harmonischer Erregerschwinung ergibt sich:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_f t)$$

Die Lösung dieses Problems ergibts sich aus der Supperposition der harmonischen Lösungen x_h ($f_0 = 0$, siehe Abschnitt 1.2) und einer speziellen Lösung x_s ($f_0 \neq 0$). Die spezielle Lösung kann dann gegeben werden durch:

$$x_s(t) = A \cdot \cos(\omega_f t - \varphi)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right) \end{aligned}$$

Anzumerken ist dabei noch, dass für große Zeiten der spezielle Anteil der Lösung die Schwingung bestimmt:

$$x_h \longrightarrow 0 \text{ für } t \longrightarrow \infty$$

und damit

$$x = x_h + x_s \longrightarrow x_s \text{ für } t \longrightarrow \infty$$

Die Zeit während x_s noch nicht vollständig die Schwingung dominiert nennt sich Einschwingvorgang.

1.4 Resonanz

Wir gehen nun davon aus, dass der Einschwingvorgang beendet ist und das System sich in einer stabilen Schwingung befindet. Resonanz ist dann derjenige Zustand für den die Amplitude, abhängig von der Erregerfrequenz ω_f, maximal wird. Siehe dazu Abbildung 1.1:

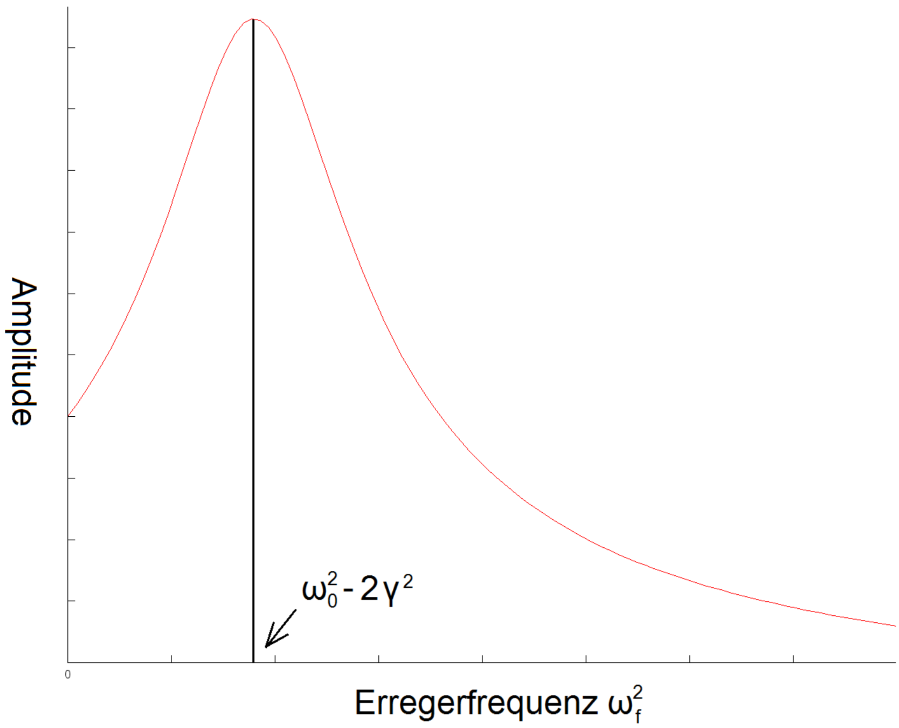

Abbildung 1.1: Resonanzkurve

Die rote Kurve stellt dabei die Amplitude A in Abhängigkeit des Erregerfrequenzquadrats ω_f^2 dar. Das Maximum und damit die Resonanz ergeben sich dann für:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Einfaches Einsetzen ergibt damit für die maximal mögliche Amplitude:

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Ohne Dämpfung ($\gamma = 0$) strebt die Amplitude im Bereich der Resonanzfrequenz sogar gegen Unendlich (Resonanzkatastrophe).

2 Aufgaben

2.1 Drehpendel, freie Schwingungen

In dieser Aufgabe wird der Oszillator durch ein Pohl'sches Rad realisiert. Der einzige Dämpfungsfaktor ist die Luftreibung. Daher ist mit einer schwachen Dämpfung zu rechnen. Es wird das sogenannte «CASSY» Messsystem zur Verfügung gestellt, mit dem folgende Daten dargestellt werden sollen:

1. zeitlicher Verlauf des Phasenwinkels
2. zeitlicher Verlauf der Winkelgeschwindigkeit
3. zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie

Das CASSY-System misst dabei die Auslenkung x des Rades. Der Phasenwinkel ψ kann damit nun über $\psi = \frac{x}{r}$ berechnet werden, wobei r der Abstand von der Auslenkungsmessung bis zum Mittelpunkt des Rades ist. Für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt der Zusammenhang $\omega = \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \dot{x}$. Da das Rad kein Translationsbewegung ausführt ist die kinetische Energie vollständig durch die Rotationsenergie gegeben. Also durch $E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

Dazu muss noch das Trägheitsmoment Θ abeschätz werden:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \Theta = \frac{1}{2} m(r_a^2 + r_i^2) \approx 1,3494 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ & \text{mit } m = 0,1855 \text{kg} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{D^*}{\Theta} \\ \gamma &= \frac{\alpha}{2 \cdot \Theta} \end{aligned}$$

wobei D^* die Drehfederkonstante und α den konstanten Faktor der Stokes'schen Reibung ($\sim v$) beschreiben. Da hier hauptsächlich Luft für die Dämpfung verantwortlich ist, kann mit einem kleinen Wert für α rechnen. Damit wird sich also der Schwingfall einstellen, sodass die Schwingung Cosinus-förmig sein und die Amplitude exponentiel mit der Zeit abnehmen wird. Für die Periodendauer gilt dann:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{D^*}{\Theta} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \Theta}}}$$

In diesem Versuch wird γ durch wiederholtes Anpassen der theoretischen an die gemessen Daten ermittelt.

2.2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Der Aufbau verändert sich nun dahingehend, dass zusätzlich zur Dämpfung durch Luftreibung auch noch eine Wirbelstrombremse die Schwingung abschwächt (jedoch noch immer Schwingfall!). γ soll nun auf 2 Arten bestimmt werden. Zum einen so wie im ersten Versuch, zum anderen über den Dämpfungsfaktor k. Dieser ist definiert über:

$$k = e^{\gamma \cdot T} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\ln(k)}{T}$$

Experimentell kann er ermittelt werden durch die Messung der Abschwächung der Amplitude nach n Perioden:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \\ &\text{bzw.} \\ k &= \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}} \end{aligned}$$

Außerdem soll die korrigierte Dämpfungskonstante $\gamma_{korr}(I) = \gamma(I) - \gamma(0)$ ermittelt werden. Man sieht leicht ein, dass die Dämpfung der Wirbelstrombremse proportional zu I^2 sein muss, da die dämpfende Lorentzkraft ebenfalls proportional zu I^2 ist ($F_L = B \cdot l_D \cdot I = \mu_r \mu_0 \frac{n \cdot l_D}{l_S} \cdot I^2 = const \cdot I^2$).

Wie oben gezeigt kann die Periodendauer angegeben werden durch:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} + \frac{\pi \cdot \gamma^2}{\omega_0^3} + \frac{3 \cdot \pi \gamma^3}{4 \cdot \omega_0^5} + \mathcal{O}\left(\gamma^4\right)$$

Da $\gamma < \omega_0$ kann die Periodendauer näherungsweise durch

$$T \approx \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$$

beschrieben werden. Man sollte also (fast) keine Abhängigkeit der Periodendauer von der Dämpfungskonstante γ und damit vom Strom I finden!

Man nennt das Verhältnis $Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}}$ den Gütefaktor der Schwingung. Dann gilt also

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot \dot{\phi^2}(t)}{\dot{\phi}^2(t) - \dot{\phi}^2(t+T)} = \frac{2 \cdot \pi}{1 - e^{-2\gamma T}} \approx \frac{\omega_0}{2 \cdot \gamma}$$

wenn man $\gamma \cdot T \ll 1$ annimmt.

2.3 Messen der Winkelrichtgröße D^*

Man hängt nun Gewichte an den Rand des Rades und misst die Ablenkung ϕ von der Nullstellung. Für das rückstellende Drehmoment gilt:

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin\theta$$

Hängt man die Gewichte geschickterweise wie in Abbildung 2.1 auf so folgt:

$$\theta = 90° + \phi$$

$$\Rightarrow M = r \cdot F \cdot \cos\phi$$

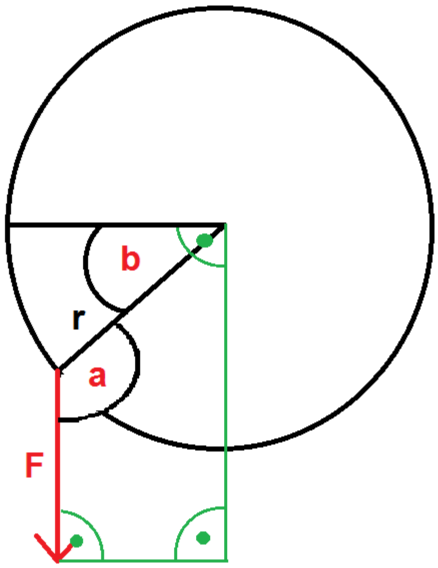

Abbildung 2.1: a=θ und b=ϕ

Die Winkelrichtgröße ist dann gegeben mit:

$$D^* = \frac{M}{\phi} = \frac{r \cdot F \cdot \cos\phi}{\phi}$$

Da $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta} = (\frac{2\pi}{T})^2$ folgt somit sofort:

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2}{4\pi^2}$$

2.4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Nun wird mit einem äußeren periodischen Drehmoment der Kreisfrequenz ω_f eine Schwingung erzwungen. Dabei sollen Resonanzkurven $\phi(\omega_f)$ aufgenommen werden. Zudem soll noch die Phasenverschiebung φ zur Erregerschwingung weit unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz bestimmt werden.

Zur Bestimmung des Gütefaktors wird der Frequenzabstand $\Delta\omega$ derjenigen Frequenzen gemessen für, die nur noch ein Ausschlag von einem $\frac{1}{\sqrt{2}}$-tel der maximalen Amplitude zu vermessen ist. Der Gütefaktor bestimmt sich dann über:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

2.5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

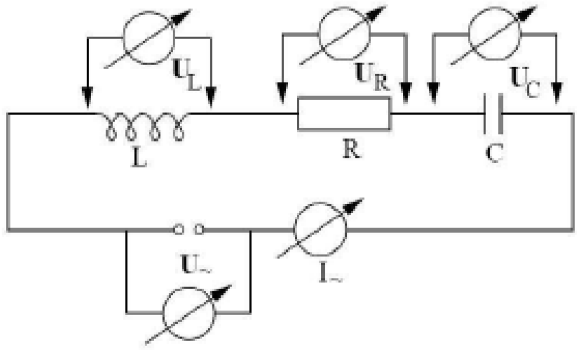

Abbildung 2.2: Serienschwingkreis (Quelle: Vorbereitungshilfe)

Ein Serienschwingkreis wird nun wie in Abbildung 2.2 gezeigt aufgebaut und durch eine Cosinus-förmige Wechselspannung U mit der Frequenz ω_f angeregt. Dann gilt sofort:

$$U = U_L + U_R + U_C = L \cdot \dot{I} + R \cdot I + \frac{1}{C} \int I \cdot dt$$

Aus der obigen DGL erhält man damit:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \gamma &= \frac{R}{2 \cdot L} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{4L - C \cdot R^2}{4 \cdot L^2 \cdot C}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \varphi) + I_0 \cdot \cos(\omega_f t + \varphi)$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)
\end{aligned}
$$

Die Impedanz Z der Schaltung berechnet sich über: $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$

Im Resonanzfall ist die Güte $Q > 1$, sodass eine Spannungserhöhung eintritt. Allgemein ist sie jedoch gegeben durch: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.