Vorbereitung

Resonanz

Carsten Röttele

17. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

Theoretische Grundlagen

In diesem Versuch beschäftigt man sich mit harmonische Schwingungen, zuerst noch dämpfungsfrei, danach gedämpft. Die allgemeine Schwingungsgleichung lautet:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Man erkennt hier den Dämpfungsfaktor β, weshalb die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist. Außerdem spiegelt die Funktion $f(t)$ eine äußere Kraft wieder, welche die Schwingung antreibt.
Zunächst wird die homogene Lösung $x_h(t)$ betrachtet, für die $f(t) = 0$ ist. Man verwendet dazu den Ansatz $x(t) = c \cdot e^{-\lambda x}$. Durch einsetzen des Ansatzes erhält man:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Aufgrund der Wurzel gilt es nun drei Fälle zu unterscheiden:

- **Schwingfall $\beta < \omega_0$:** Hier wird der Radikand kleiner als null, weshalb λ komplex wird. Daraus ergibt sich dann für unsere homogene Lösung:

  $$x_h(t) = e^{-\beta t} \cdot (c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \psi)$$

  Hierbei sind c_1, c_2, A Konstanten, die man durch die Anfangsbedingungen berechnen kann und ψ ist die Phasenverschiebung.
  Die Schwingung hat hier eine konstante Frequenz, jedoch verkleinert sich die Amplitude mit der Zeit durch die Dämpfung.

- **aperiodischer Grenzfall $\beta = \omega_0$:** Hier ist die Wurzel null, weshalb man für die Lösung erhält:

  $$x_h(t) = A \cdot (1 + Bt) \cdot e^{-\beta t}$$

  Hier hat man keine Schwingung, sondern das System klingt sich sehr schnell ab.

- **Kriechfall $\beta > \omega_0$:** Jetzt ist der Radikand positiv und man erhält:

  $$x(t) = e^{-\beta t} \cdot (c_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} = A \cdot e^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t)$$

  Auch hier gibt es keine Schwingung und das System klingt langsam ab.

Dies sind die Lösungen der homogenen Gleichung. Ist nun $f(t) \neq 0$ so muss man auch noch die Partikuläre Lösung finden und die gesamte Lösung erhält man dann durch Addition der homogenen und partikulären Lösung.

1 Drehpendel, freie Schwingungen

Wir betrachten bei diesem Versuch zunächst ein die Schwingung eines Pohlschen Rades, was ein sogenanntes Drehpendel ist. Dieses besitzt eine Feder, wodurch es bei Schwingungen eine rücktreibende Kraft erfährt. Wir erhalten dadurch folgende Schwingungsgleichung, bei der θ das Trägheitsmoment, γ der Reibungskoeffizient und D die Federkonstante ist:

$$\theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Als erstes soll man sich mit dem Messwerterfassungssystem CASSY vertraut machen. Hierzu soll der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels, die Winkelgeschwindigkeit sowie die kinetische Energie dargestellt werden. Hierbei ist dann der Verlauf des Phasenwinkels die Lösung der DGl (eine vermutlich periodische Schwingung), die Winkelgeschwindigkeit, die zeitliche Ableitung des Phasenwinkels (lässt sich mit CASSY berechnen). Die kinetische Energie ergibt sich mit der Formel $E = \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2$. Da man mit CASSY auch Funktionen angegeben kann, brauchen wir für die kinetische Energie nur noch das Trägheitsmoment zu berechnen, damit wir die Formel eingeben können. Dieses lässt sich mithilfe der Daten aus dem Aufgabenblatt berechnen:

$$\theta = \int r^2 dm = \frac{1}{2}V \cdot \rho \cdot (r_a^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}\pi(r_a^2 - r_i^2) \cdot d \cdot \rho \cdot (r_a^2 + r_i^2) = 1,39 \cdot 10^-3 kg \cdot m^2$$

Außerdem soll noch die Phasenraumdarstellung dargestellt werden, was man erhält, indem man den Phasenwinkel über die Phasengeschwindigkeit aufträgt. Auch die Periodendauer soll noch über $T = \frac{2\pi}{\omega}$ berechnet werden, ebenso soll man noch die Dämpfungskonstante β durch Anpassung von der gemessenen Kurve an die berechnete Kurve bestimmt werden, da durch Reibung die Schwingung gedämpft wird.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Wie in der vorherigen Aufgabe soll man wieder Schwingungen durchführen, nur dieses Mal mit einer Wirbelstrombremse bei Strömen von $I_B = 100, 200, 400, 700 mA$. Wieder sollen die Winkel-Zeit-Diagramme aufgezeichnet werden und die Dämpfungskonstante β per Hand bestimmt werden. Alternativ kann man die Dämpfungskonstante aber auch berechnen über das Dämpfungsverhältnis k:

$$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \text{ bzw. } k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}}$$

Da $k = e^{\beta T}$ gilt, folgt daraus: $\beta = \frac{\ln(k)}{T}$.
Im Allgemeinen ist das arithmetische Mittel besser geeignet, da wir hier mehr Messwerte zum berechnen nehmen, wodurch sich der statistische Fehler verringert. Jedoch ist es in

diesem Fall sehr aufwendig, da wir vor allem bei niedriger Dämpfung sehr viele Schwingungen hierzu betrachten müssten, weshalb wahrscheinlich die zweite Formel sinnvoller ist.
Weil die Dämpfung praktisch keine Auswirkung auf die Periodendauer hat, sollte man keine I_B-Abhängigkeit von T feststellen können. Dies kann man sehen, indem man die Periodendauer mit der Taylor-Formel nähert:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0(1-\frac{\beta^2}{\omega_0^2})} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}(1+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\omega_0^2}+...) \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Dies können wir machen, da wir uns im Schwingfall befinden, wo $\beta \ll \omega_0$ gilt.
Außerdem soll jetzt noch die Dämpfungskonstante in Abhängigkeit des Wirbelstroms bestimmt werden. Hierbei ist es wichtig, dass man die Dämpfung $\beta(0)$, die man im ersten Aufgabenteil bestimmt hat, abzieht. Deswegen gilt:

$$\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Da die Dämpfung proportional zur Kraft ist und in diesem Fall die Lorentzkraft für die Dämpfung verantwortlich ist, folgt:

$$F = I \cdot l \cdot B = \mu_0 n \cdot l \cdot I^2 = const \cdot I^2$$

Somit ist β proportional zu I^2. Des weiteren gilt für den I_B-Wert der Grenzdämpfung: $I_{B,Gr.} = \sqrt{\frac{\omega_0}{const}}$. Diese Wert sollen noch experimentell bestimmt werden.
Als letztes soll hier noch der Gütefaktor berechnet werden, für den folgende Formel gilt:

$$Q = 2\pi\frac{\varphi_{max}^2(t)}{\varphi_{max}^2(t) - \varphi_{max}^2(t-T)} = 2\pi\frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi\frac{1}{1-e^{-2\beta T}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

3 Messung der Winkelrichtgröße D^*

Nun soll die Winkelrichtgröße D^* gemessen werden. Hierzu sollen drei verschiedene Gewichte an den Zeiger des Pendels mittels eines Fadens gehängt werden, um danach die Winkelauslenkung zu messen. Hierbei ist zu beachten, dass der Faden durch die Randnut verläuft, damit beim Kreuzprodukt des Drehmomentes die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Es gilt dann:

$$D^*\varphi = M = F \cdot r \Rightarrow D^* = \frac{F \cdot r}{\varphi}$$

Außerdem können wir über die Eigenfrequenz jetzt noch mal das Trägheitsmoment bestimmen und es dann mit dem Theoriewert aus Aufgabe 1 vergleichen:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T(0)^2} = \frac{D^*}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{D^*T(0)^2}{4\pi^2}$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Im nächsten Aufgabenteil hat man wieder zwei Bremsströme von 400 und 200mA, dieses Mal aber noch zusätzlich eine antreibende Kraft der Form:

$$f(t) = k\cos(\Omega t) = \frac{M_0}{\theta}\cos(\Omega t)$$

Es soll dieses Mal die Resonanzkurve $\varphi(\Omega)$ aufgetragen werden. Wir bekommen folgende DGl:

$$\theta\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{M_0}{\theta}\cos(\Omega t)$$

Wie schon in den theoretischen Grundlagen erklärt erhalten wir die Lösung durch Zusammensetzen der homogenen und partikulären Lösung $\varphi(t) = A_1 e^{-\beta t} cos(\omega t + \psi_1) + A_2\cos(\Omega t + \psi_2)$, wobei jedoch nach einer gewissen Zeit die homogene Lösung gegen null geht und somit nur noch die antreibende Kraft für die Schwingung sorgt. Es gilt dann:

$$\varphi(t) = A\cos(\Omega t + \psi)$$

Hierbei gilt für die Phasenverschiebung und die Amplitude:

$$\psi = \arctan(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2})$$
$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

Man soll nun die Phasenverschiebung für drei verschiedene Fälle betrachten:

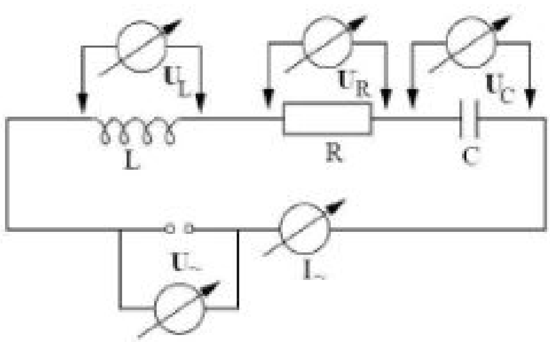
- Weit unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_0$):
  Man hat hier fast keine Auswirkung der Eigenfrequenz auf die Schwingung, weshalb die Phasenverschiebung $\psi \approx 0$ ist.
- Weit oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_0$):
  Jetzt ist die angeregte Kraft treibend, deshalb ist $\psi \approx -\pi$.
- In der Nähe der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_0$):
  Hier geht der Bruch gegen unendlich, deshalb gilt $\psi \approx -\frac{\pi}{2}$.

Die Amplitude wird hingegen maximal bei $\Omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.
Schließlich soll noch der Gütefaktor bestimmt werden, welchen man über die Breite der Resonanzkurve erhält. Man betrachtet die beiden Punkte ω_1 und ω_2, bei welchen die Amplitude nur noch ein $\sqrt{2}$-tel so groß wie bei der Resonanzamplitude ist. Mit dem Abstand der beiden Punkte $\Delta\omega$ lässt sich dann der Gütefaktor berechnen:

$$\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

In der letzten Aufgabe wird ein Serienschwingkreis mit folgendem Schaltplan untersucht:



Es werden hier also elektromagnetische Schwingungen untersucht, bei der ein Kondensator, eine Spule und ein Widerstand in Reihe geschaltet sind. Über das Kirchhoffsche Gesetz bekommt man die Schwingungsgleichung:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) \Rightarrow \ddot{I}(t) + \frac{L}{R}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{\dot{U}(t)}{L}$$

Wenn wir nun $\beta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ setzen, so erhalten wir die normale Schwingungsgleichung. Wir erhalten dann die Lösung wieder durch addieren der homogenen und inhomogenen Lösung als:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \psi) + I_0 e^{i\omega t + \psi} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$$

Die Stromstärke I_0 berechnet man mithilfe der Impedanz:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Außerdem kann man die Resonanzfrequenz bestimmen mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Daten und man erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \approx 8298,8\frac{1}{s} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1320,8Hz$$

Auch die Phasenverschiebung lässt sich wieder berechnen als:

$$\psi = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

Man soll nun bei verschiedenen Dämpfungswiderständen die Resonanzkurve messen und danach die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz aufzeichnen. Wiederum kann man den Gütefaktor aus der Resonanzbreite bestimmen, oder berechnen als:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\omega_0 C = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Man erkennt, dass der Gütefaktor auch viel größer als 1 werden kann, z.B. beim Resonanzfall, was gleichzeitig bedeutet, dass U_L und U_C U_0 in diesem Fall übersteigen. Dies wird als Spannungsüberhöhung bezeichnet, womit man ebenfalls den Gütefaktor bestimmen kann:

$$|U_L(\omega_0)| = |L\dot{I}| = \omega_0\frac{L}{R}U_0 = QU_0$$
$$|U_C(\omega_0)| = |\frac{1}{C}\int Idt| = \frac{1}{\omega_0 CR} = QU_0$$

Wenn man nach dem Gütefaktor auflöst, erhält man somit:

$$Q = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0} = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0}$$