Vorbereitung

Resonanz

Stefan Schierle

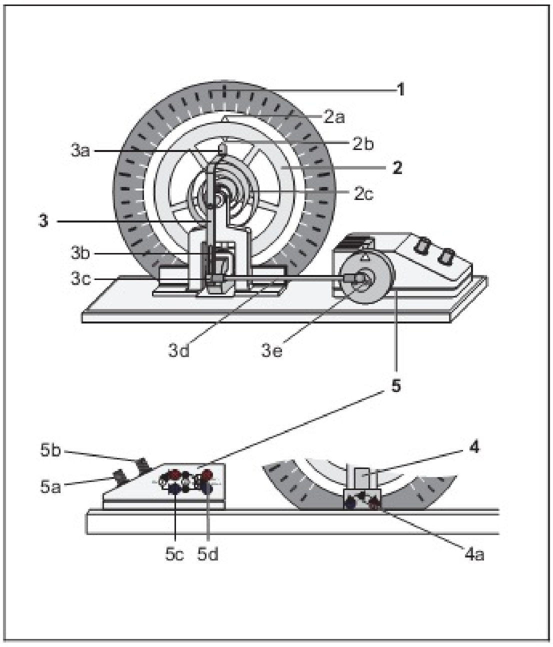
Versuchsdatum: 17. 01. 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Drehpendel, freie Schwingung

1.1 Der Versuchsaufbau

Dieser Versuch wird mit Hilfe eines Pohlschen Rades durchgeführt.



Pohlsches Rad - Quelle:Leybold-PohlschesRad.pdf der Literatur

Dabei wird der Pendelkörper(2) ausgelenkt, den Grad der Auslenkung kann man anhand des Skalenrings(1) und der Markierung(2b) bestimmen. Auf den Ausgelenkten Pendelkörper wirkt das rückstellende Moment der Schneckenfeder(2c), wodurch ohne weitere äußere Einflüsse eine harmonische Schwingung erzeugt wird. Diese wird jedoch durch die nicht ideale Aufhängung des Pendelkörpers leicht gedämpft, durch die so entstehende Reibung.
Der Schwingungsverlauf lässt sich durch den Erreger(3) und die Wirbelstrombremse(4) beeinflussen.

1.2 Trägheitsmoment des Pendelkörpers

Der oben schon erwähnte Pendelkörper besteht aus einem Kupferring, dessen Trägheitsmoment hier in der Vorbereitung berechnet werden soll:
Es werden die gegebenen Werte der Aufgabenstellung verwendet; $\rho = 8,96 \frac{g}{cm^3} = 8,96 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$, Innenradius $r_i = 0,0747m$, Außenradius $r_a = 0,0947m$, Dicke $d = 0,002m$

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_{r_i}^{r_a} r^2 dm \\
&= \rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 dV \\
&= \rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 \cdot d \cdot 2\pi r dr \\
&= \rho \cdot d \cdot 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr \\
&= \frac{1}{2}\rho d\pi \left(r_a^4 - r_i^4\right) \\
&= 1,39 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2
\end{aligned}
$$

1.3 Harmonische Schwingung

Die harmonische Schwingung des Pendelkörpers lässt sich durch folgende Differenzialgleichung in Abhängigkeit der Winkelauslenkung, der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung beschreiben:

$$\Theta\ddot{\varphi} = -D^{\star}\varphi - \varrho\dot{\varphi} + f(t)$$

Hierbei sind $D^{\star}$ die Federkonstante und ϱ die Dämpfung. Was sich umschreiben lässt als:

$$\omega_0^2 = \frac{D^{\star}}{\Theta} \qquad 2\gamma = \frac{\varrho}{\Theta}$$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = f(t)$$

Diese Differentialgleichung lässt dich durch den Ansatz $\varphi(t) = c \cdot e^{\lambda t}$ lösen. Dies ist nur der partikuläre Lösungsteil, da hier aber eine Schwingung ohne äußere Anregung betrachtet werden soll, also $f(t) = 0$ gilt, ist diese Lösung völlig ausreichend.

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda \cdot c \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot c \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

Nun muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, da der Wurzelterm reell, komplex oder Null sein kann. Bei diesem Versuch ist nur der Schwingfall mit schwacher Dämpfung durch Reibung von Bedeutung. Die anderen beiden Fälle werden der Vollständigkeit halber mit aufgeführt.

- **Schwingfall (schwach gedämpft):** $\gamma < \omega_0$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ \Rightarrow \varphi(t) &= ae^{-\gamma t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} + be^{-\gamma t} \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \qquad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ &= ae^{-\gamma t}\left(\cos\omega_e t + i\sin\omega_e t\right) + be^{-\gamma t}\left(\cos\omega_e t - i\sin\omega_e t\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega_e t + B\sin\omega_e t\right) \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = A$ erhält man als Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_e t + \psi_1)$$

Es findet also eine Schwingung mit exponentiell abfallender Amplitude statt.

- **Kriechfall:** $\gamma > \omega_0$

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\gamma t}\cosh(\omega t + \psi)$$

Beim Kriechfall kehrt das anfänglich ausgelenkte Drehpendel "kriechendïn die Ausgangsposition zurück.

- **aperiodischer Grenzfall:** $\gamma = \omega_0$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma t)$$

Der aperiodische Grenzfall ist der am schnellsten abfallende Kriechfall, das Pendel schwingt in diesem Fall am schnellsten in den Ruhepunkt zurück, wo es verbleibt.

Beim Versuch soll nun der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels und der kinetischen Energie ($E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2$) mit dem Auswertungsprogramm CASSY. Ebenfalls soll ein Phasenraumdiagramm der Schwingung erstellt, sowie die Periodendauer und die Dämpfungskonstante (γ) bestimmt werden.
γ wird durch das Angleichen der Theoretischen Kurve an die experimentell ermittelte Kurve bestimmt, indem γ variiert wird.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun soll eine Dämpfung durch die Wirbelstrombremse mit unterschiedlich starken Strömen (100, 200, 400, 700 mA) untersucht werden.
analog zu Aufgabe 1 soll nun wiederum die Dämpfungskonstante ermittelt werden. Zudem soll auch aus dem Dämpfungsverhältnis k die Dämpfungskonstante ermittelt werden. Für k sind zwei Formeln in Abhängigkeit der optimalen Schwingzahl n gegeben, von denen die zweckmäßigere gewählt werden soll:

$$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \qquad\qquad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$ ist der genauere Term, da hier durch die Verwendung von mehr als zwei Messwerten (für $n > 1$) der statistische Fehler verringert wird. Jedoch ist dies bei vielen Messwerten ein sehr aufwändiges Verfahren, sodass die andere Formel hier effektiver eingesetzt wäre. Die endgültige Auswahl sollte also von der Anzahl der Messwerte abhängig gemacht werden.
Die Dämpfung durch die Wirbelstrombremse beeinflusst im Normalfall nur die Amplitude der Schwingung und nicht die Periodendauer, daher sollte diese keine Abhängigkeit vom Spulenstrom (I_B) aufweisen.
Da die gesamte Dämpfung aber von der Wirbelstrombremse und der Reibung der Lagerung abhängt, muss zur Ermittlung der reinen Dämpfung der Wirbelstrombremse eine korrigierte Dämpfungskonstante (β_{korr}) ermittelt werden

$$\beta_{korr} = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Die vom Strom abhängende dämpfende Kraft lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} F &= I_B \cdot Bl \\ &= \mu I^2 n \end{aligned}$$

daraus ist klar ersichtlich, dass die Dämpfung von I^2 abhängt.

Der Gütefaktor gibt das Verhältnis von Schwingungsenergie zum Energieverlust pro Periode dar:

$$Q = 2\pi\frac{\hat{\varphi}^2(t)}{\hat{\varphi}^2(t) - \hat{\varphi}^2(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$$

3 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße $D^\star$

Die Winkelrichtgröße der Schneckenfeder lässt sich bestimmen, indem man Gewichte (5, 10, 20 g) an den Zeiger des Pendelrades hängt und dieses in beide Richtungen auslenkt. Die Winkelrichtgröße lässt sich nun über das Drehmoment bestimmen.

$$\begin{aligned} M &= |\vec{r} \times \vec{F}(t)| = D^\star\varphi(t) \\ D^\star &= \frac{r_a \cdot F(t)}{\varphi(t)} \end{aligned}$$

Ebenfalls soll aus der so ermittelten Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment des Drehpendels bestimmt werden.
Aus $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^\star}{\Theta}}$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T(0)}$ lässt sich eine Formel zur Berechnung des Trägheitsmomentes herleiten:

$$\Rightarrow \Theta = \frac{D^\star \cdot T^2(0)}{4\pi^2}$$

Das so bestimmte Trägheitsmoment soll nun mit dem in Aufgabe 1 theoretisch ermittelten Wert verglichen werden.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Es soll hier eine erzwungene Schwingung betrachtet werden, was bedeutet, dass der Anregungsterm $f(t)$ aus 1.3 nicht Null ist, sondern $f(t) = C\cos(\Omega t + \psi)$. Hierbei sind Ω die Frequenz der angelegten Erregerschwingung und ψ die Phasenverschiebung. Nun wird also die partikuläre Lösung der Differenzialgleichung betrachtet, die mit dem Ansatz $\varphi(t) = A \cdot e^{i\Omega t+\psi}$ gelöst werden kann, wobei A und ψ

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \qquad\qquad \psi = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGl:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\gamma t}\cos(\omega) + C \cdot e^{i\Omega t+\psi_2}$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass durch den exponentiellen Abfall des homogenen Teiles nach einer gewissen Zeit nur noch die erregende Schwingung im Experiment zu erkennen ist. Jedoch ist die eigentliche Schwingung zur Erregerschwingung um ψ Phasenverschoben.

Eben diese Phasenverschiebung soll in drei Fällen betrachtet werden, unterhalb, bei und oberhalb der Resonanzfrequenz:

- Unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_e$): Hier hat die von außen angelegte Schwingung kaum Einfluss auf die tatsächliche Schwingung. Daher gilt hier: $\psi \approx 0$
- Nahe der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_e$): Hier liegt die Phasenverschiebung bei $\psi \approx -\frac{\pi}{2}$
- Oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_e$): Hier tritt eine Phasenverschiebung von $\psi \approx -\pi$

Den Gütefaktor dieser Schwingung erhält man durch

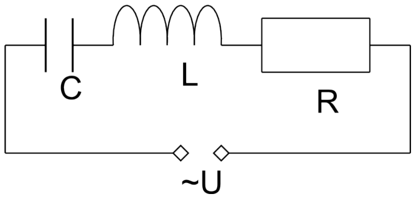
$$Q = \frac{\omega_e}{2\beta} = \frac{\omega_e}{\Delta\omega}$$

Hierbei entspricht $\Delta\omega_e$ der Frequenzdifferenz mit $A = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$

5 Serienschwingkreis, erzwungen Schwingungen

In diesem Versuchsteil soll ein elektrischer Schwingkreis untersucht werden.

Schaltbild Serienschwingkreis:



Beim elektrischen Serienschwingkreis macht man sich die Phasenverschiebung des Stromes an Spule und Kondensator zu Nutze. Ebenfalls liegt eine antreibende Wechselspannung am Schwingkreis an.
Aus der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich nun folgende Beziehung herleiten:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) \\ &= L\dot{I}(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} + r \cdot I(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{\dot{U}_0(t)}{L}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich analog zur mechanischen Schwingung lösen, indem man $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ und $2\gamma = \frac{R}{L}$ einsetzt. Eben wegen der Analogie zur mechanischen Schwingung kann man deren allgemeine Lösung praktisch übernehmen, wobei zu beachten ist, dass $\omega_e = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ und die Amplitude I_0 sind.

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_e t + \psi) + I_0 \cdot e^{i\omega t + \psi}$$

Hier fällt durch die Dämpfung des Widerstandes der homogene Lösungsteil ebenfalls nach einer gewissen Zeit so weit ab, dass nur noch der partikuläre Teil ($I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t + \psi}$) von Relevanz ist.

I_0 lässt sich dann einfach über das ohmsche Gesetzt bestimmen:

$$I_= = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ebenfalls kann die Phasenverschiebung auch wie bei der mechanischen Schwingung via $\tan\psi = \frac{In(Z)}{Re(Z)}$ bestimmt werden.

$$\psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Der Resonanzfall tritt bei $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, was bei den gegebenen Werten $\omega = 8,3 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$ wäre, auf.

Der noch zu bestimmende Gütefaktor lässt sich mit $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ errechnen.