

# Versuch P1-12

## Resonanz

### Auswertung\*

Gruppe Mo-19  
Yannick Augenstein  
Patrick Kuntze

Versuchsdurchführung: 21. November 2011

---

\*Die Auswertung inklusive aller Messdaten und Rechnungen erhalten Sie unter "<http://bit.ly/tcb6sZ>"

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Drehpendel, freie Schwingungen</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen</b>	<b>6</b>
2.1	Schaubilder . . . . .	6
2.2	Bestimmung von $\beta$ . . . . .	7
2.2.1	Bestimmung durch Regression . . . . .	7
2.2.2	Bestimmung aus Dämpfungsverhältnis . . . . .	7
2.3	Bestimmung der Güte . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Drehpendel, Winkelrichtgröße und Trägheitsmoment</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Drehpendel, erzwungene Schwingungen</b>	<b>10</b>
4.1	Resonanzkurven . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Schwingkreis, erzwungene Schwingung</b>	<b>11</b>
5.1	Stromstärke und Impedanz . . . . .	11
5.2	Resonanzüberhöhung . . . . .	13
5.3	Phasenverschiebung . . . . .	15

# Abbildungsverzeichnis

1	Winkel-Zeit-Diagramm . . . . .	3
2	Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm . . . . .	4
3	$E_{kin}$ -Zeit-Diagramm . . . . .	4
4	Phasendiagramm . . . . .	5
5	Zeitlicher Verlauf der Schwingung bei verschiedenen Bremsströmen. . . . .	6
6	Zusammenhang zwischen $I_B$ und $\beta_{korr}$ . . . . .	8
7	Resonanzkurven bei verschiedenen Bremsströmen . . . . .	10
8	Amplitude und Impedanz bei $R = 8.2 \Omega$ . . . . .	11
9	Amplitude und Impedanz bei $R = 47 \Omega$ . . . . .	12
10	Amplitude und Impedanz bei $R = 100 \Omega$ . . . . .	12
11	Spannungsverläufe bei $R = 8.2 \Omega$ . . . . .	13
12	Spannungsverläufe bei $R = 47 \Omega$ . . . . .	14
13	Spannungsverläufe bei $R = 100 \Omega$ . . . . .	14
14	Phasenverschiebung bei $R = 8.2 \Omega$ . . . . .	16
15	Phasenverschiebung bei $R = 47 \Omega$ . . . . .	16
16	Phasenverschiebung bei $R = 100 \Omega$ . . . . .	16

# 1 Drehpendel, freie Schwingungen

In dieser Aufgabe sollten wir den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie ohne Wirbelstrombremse und antreibende Kraft messen und in entsprechenden Diagrammen darstellen.

Zur Darstellung und Regression importierten wir die Messdaten aus CASSY in *Wolfram Mathematica*<sup>1</sup>. So ergaben sich folgende Schaubilder:

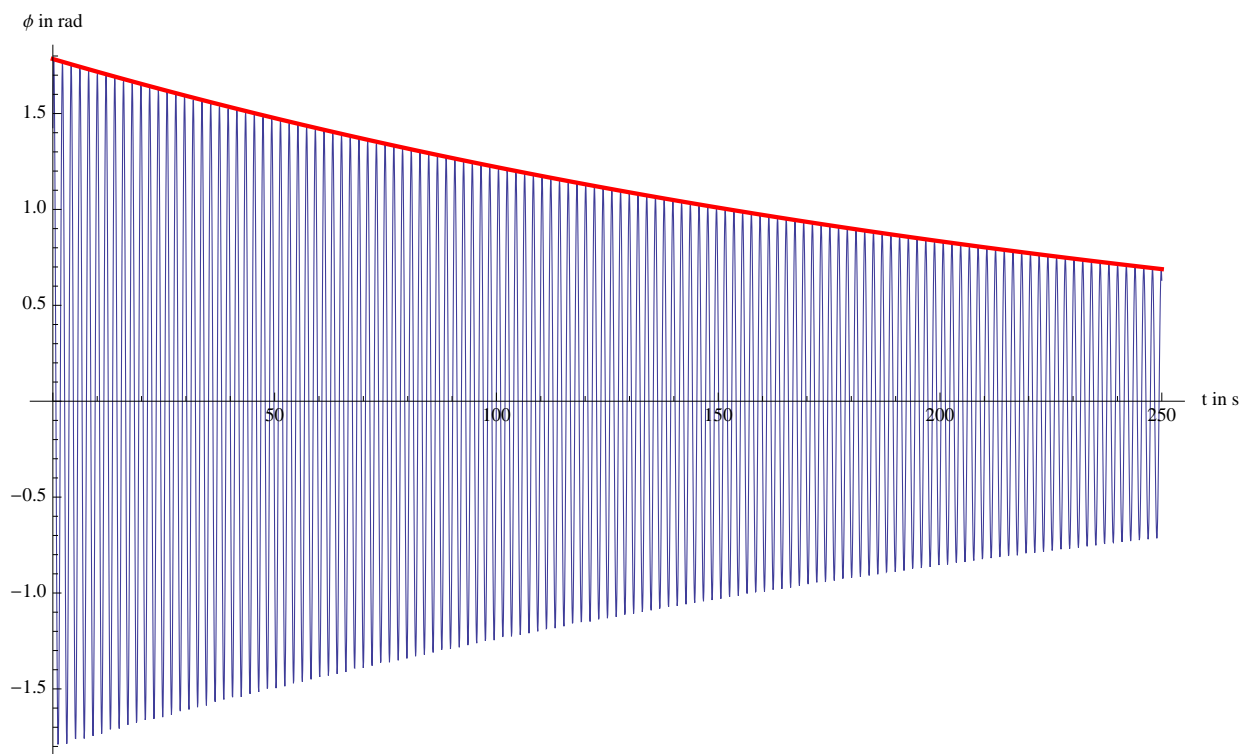


Abbildung 1: Winkel-Zeit-Diagramm

An diesem Schaubild ist gut zu erkennen, dass die Schwingung des Rades trotz fehlender Wirbelstrombremse einer (wenn auch schwachen) Dämpfung unterliegt. Die Messwerte wurden an eine Musterfunktion der Form

$$a \cdot \sin(b \cdot x + c) \cdot e^{-\beta \cdot x} + d$$

angepasst, wobei  $e^{-\beta \cdot x}$  den Dämpfungsterm der Schwingung beschreibt (rote Kurve in Abbildung 1). Wie man sieht ist  $\beta$  die Dämpfungskonstante. In unserem Fall ist

$$\beta = 0.003767 \text{ s}^{-1}$$

<sup>1</sup><http://www.wolfram.com/mathematica/>

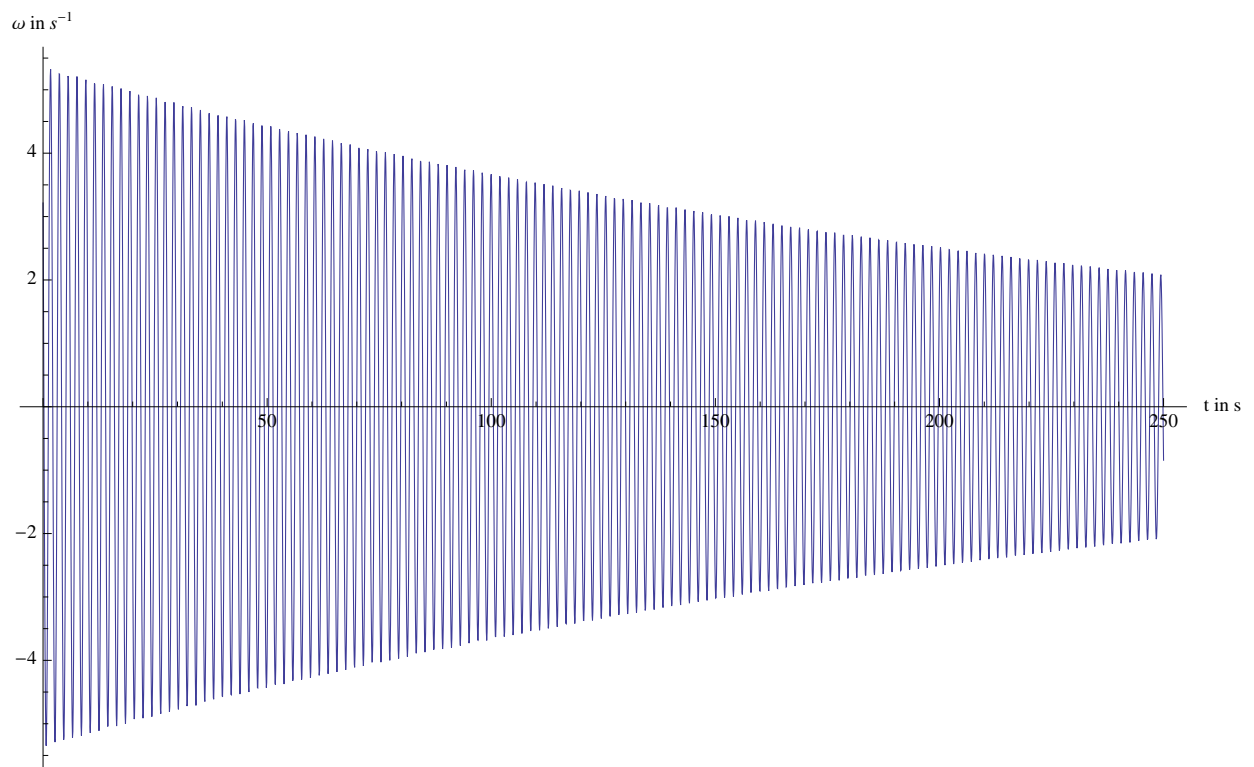


Abbildung 2: Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm

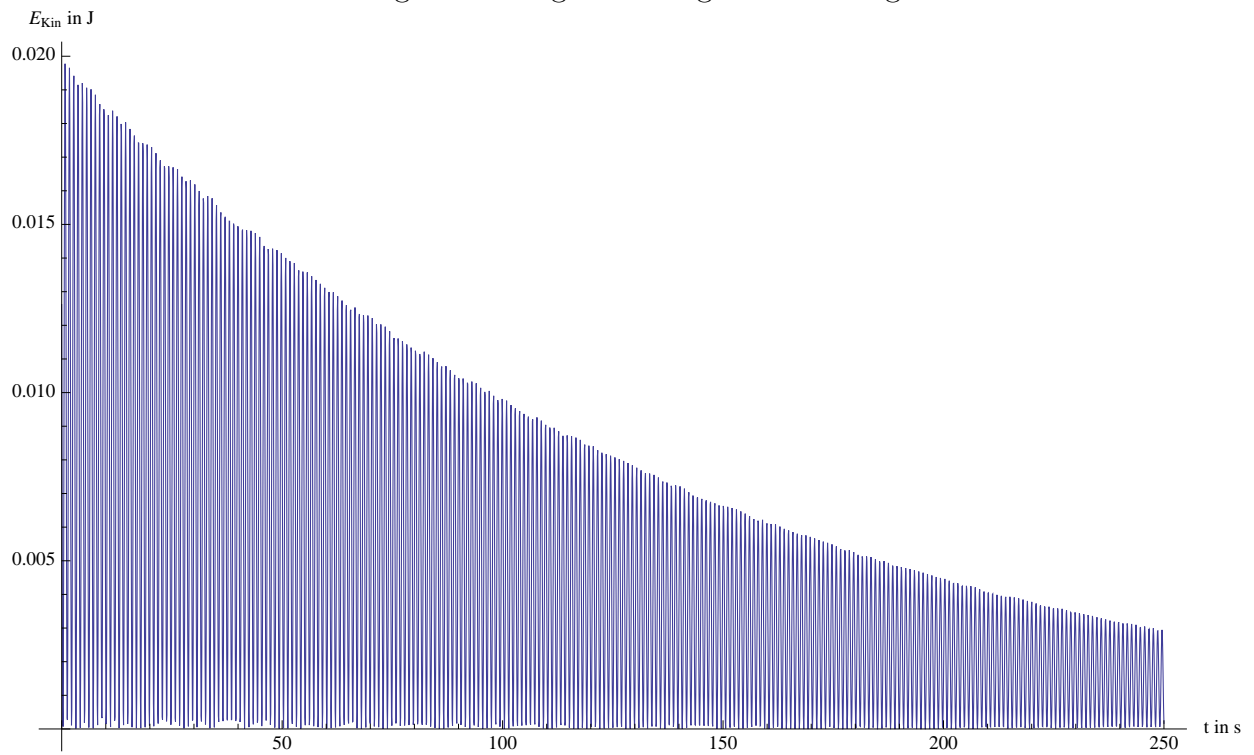


Abbildung 3:  $E_{\text{kin}}$ -Zeit-Diagramm

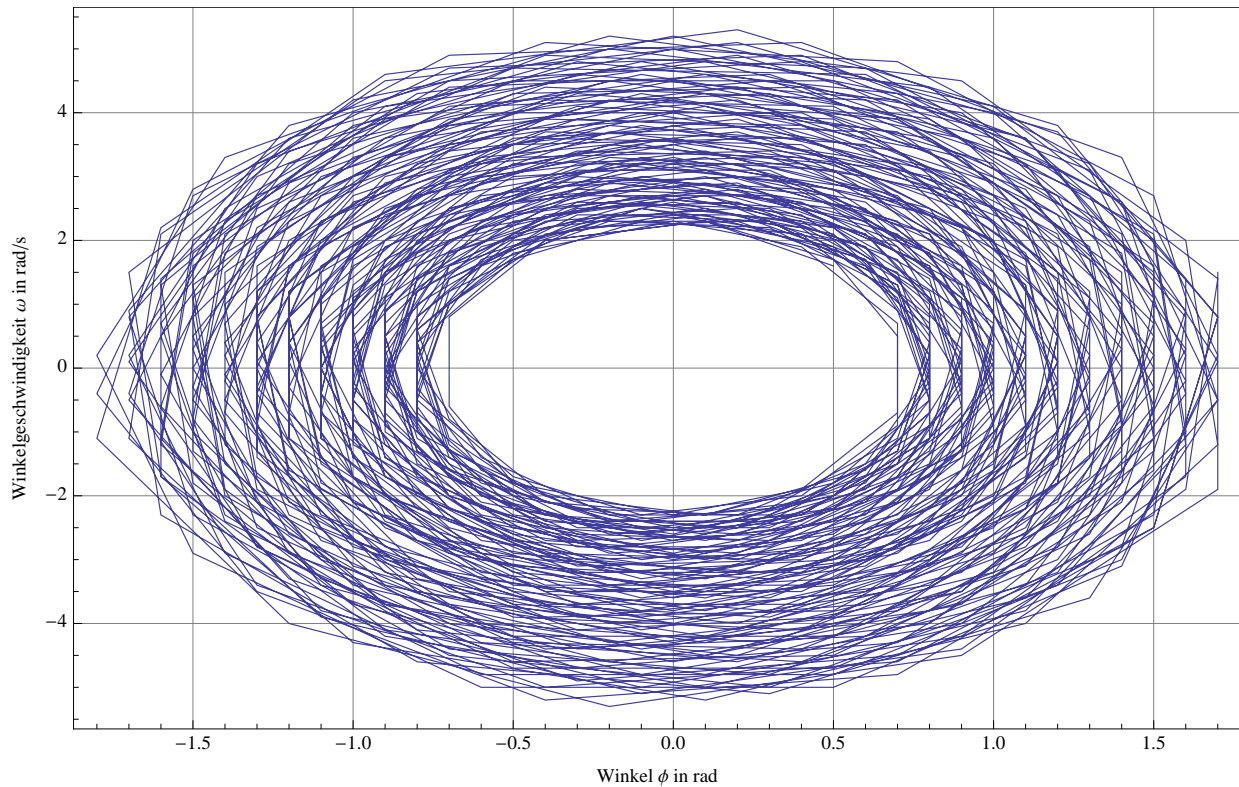


Abbildung 4: Phasendiagramm

In Abbildung 4 wurde die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  über dem Auslenkungswinkel  $\phi$  aufgetragen. Eigentlich stellt dieses Phasendiagramm eine Spirale dar, das ist jedoch auf Grund des gewählten Messintervalls an CASSY (200 ms) nur schwer zu erkennen.

Die Auftragung der kinetischen Energie in Abbildung 3 erfolgte nach der in der Vorbereitung beschriebenen Berechnung. Man sieht, dass die kinetische Energie des Systems natürlich auch mit der Zeit abnimmt.

Die Periodendauer der Schwingung betrug

$$T \approx 2 \text{ s}$$

## 2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Hier wiederholten wir die Messung aus Aufgabe 1 mit einer Wirbelstrombremse unter Betriebsströmen von 100 mA, 300 mA, 500 mA und 700 mA. Wir mussten etwas höhere Ströme verwenden als auf dem Aufgabenblatt vorgegeben, da wir (auf Grund unseres Versuchsgeräts) sonst kaum an gut darstellbare Messwerte gekommen wären.

### 2.1 Schaubilder

Die Messdaten wurden analog zu Abschnitt 1 ausgewertet. Es ist anzumerken, dass wir das Messintervall (in CASSY) für alle Messungen außer der in Abbildung 5a (100 mA) von 200 ms auf 20 ms verringert haben. Das erklärt auch die wesentlich besseren Regressionskurven für diese Messreihen.

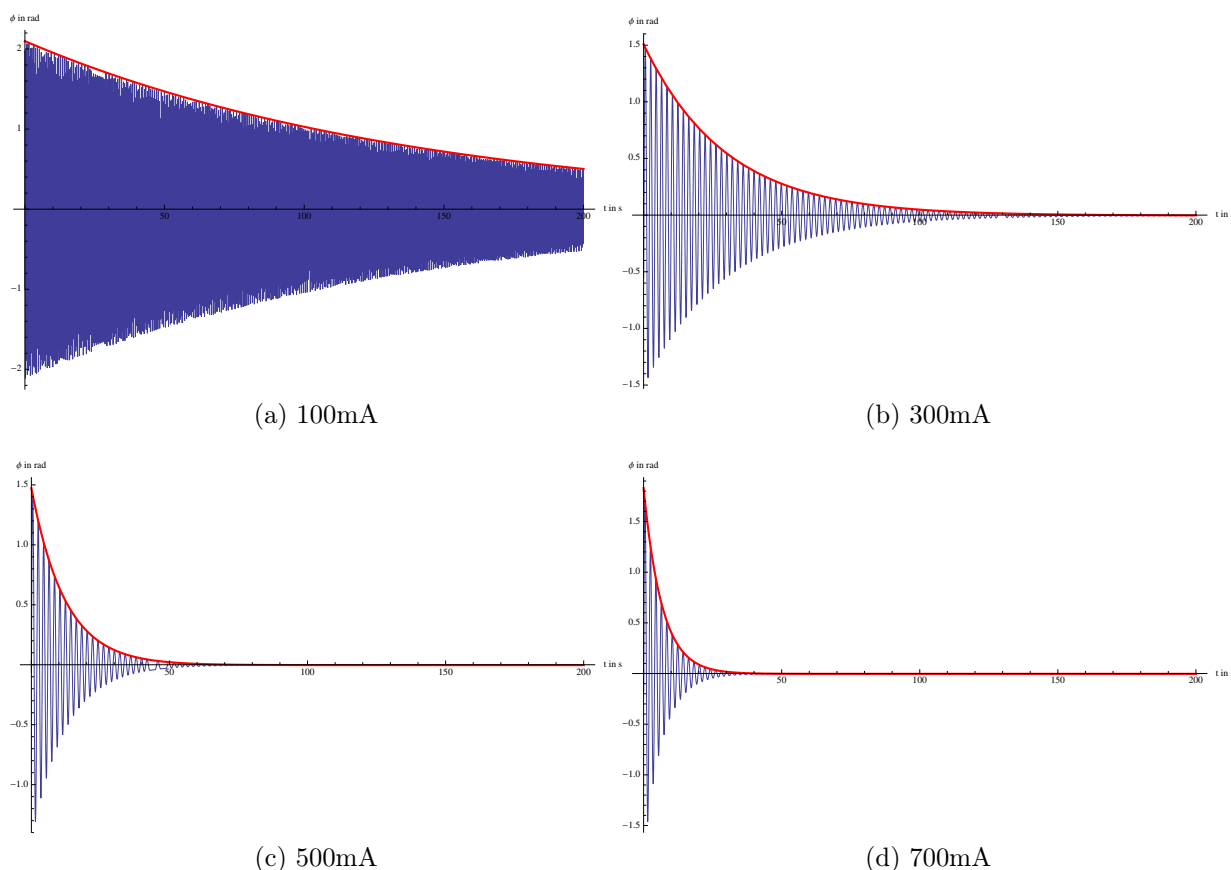


Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der Schwingung bei verschiedenen Bremsströmen.

Wie aus diesen Schaubildern deutlich hervorgeht, schwächt die Wirbelstrombremse die Schwingung des Systems bei größeren Bremsströmen erwartungsgemäß immer stärker ab. Wir waren jedoch nicht in der Lage, den Bremsstrom hoch genug einzustellen, um zum aperiodischen Grenzfall oder gar Kriechfall der Schwingung zu kommen.

## 2.2 Bestimmung von $\beta$

### 2.2.1 Bestimmung durch Regression

Die dämpfenden e-Funktionen der Schaubilder aus Abbildung 5 (rot eingezeichnet) enthalten wie in Abschnitt 1 den Dämpfungsfaktor  $\beta$ . *Wolfram Mathematica*<sup>®</sup> gab uns für  $\beta$  folgende Werte:

$I_B$	$\beta$
100 mA	0.0071 s <sup>-1</sup>
300 mA	0.0337 s <sup>-1</sup>
500 mA	0.0819 s <sup>-1</sup>
700 mA	0.1499 s <sup>-1</sup>

### 2.2.2 Bestimmung aus Dämpfungsverhältnis

Das Dämpfungsverhältnis  $k$  gibt das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungsamplituden an. Von den auf dem Aufgabenblatt gegebenen Formeln verwenden wir die Erste:

$$k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varphi_i - 1}{\varphi_i} \right)$$

Wir nehmen diese Formel, da sie den Mittelwert über die Amplituden bildet und somit die Messungenauigkeit etwas abmildert. Zur Berechnung von  $T$  und  $k$  wurden mit einem eigenen Verfahren alle Messwerte berücksichtigt (also  $n$  maximal). Aus  $k = e^{\beta \cdot T}$  haben wir dann  $\beta$  errechnet. So ergibt sich folgende Tabelle:

$I_B$ in mA	$n$	$T$ in s	$k$ aus Summe	$\beta$ aus $k$ und $T$ in s <sup>-1</sup>
100	101	1.966	1.0153	0.0077
300	32	1.972	1.0703	0.0345
500	13	1.983	1.1845	0.0854
700	7	1.99	1.3369	0.1459

Man sieht, dass die Werte relativ gut mit jenen aus der Regression übereinstimmen. Das ist eigentlich nicht weiter verwunderlich, da bei beiden Verfahren alle Messdaten berücksichtigt wurden. Um zu entscheiden, welche der beiden Methoden nun letztendlich genauer ist, müsste man sie direkt an Funktionen vergleichen und schauen, welche sich besser an die Messdaten anpasst. Das würde den Rahmen dieser Auswertung jedoch etwas sprengen, deshalb lassen wir das sein.

Der Dämpfungsfaktor muss noch bezüglich der Reibung korrigiert werden und berechnet sich dann aus  $\beta_{\text{korrr}} = \beta(I_B) - \beta(0)$ .  $\beta(0) = 0.003767 \text{ s}^{-1}$  haben wir aus Aufgabe 1 übernommen. Wir tragen  $\beta_{\text{korrr}}$  über  $I_B$  auf und erhalten den erwarteten quadratischen Zusammenhang.

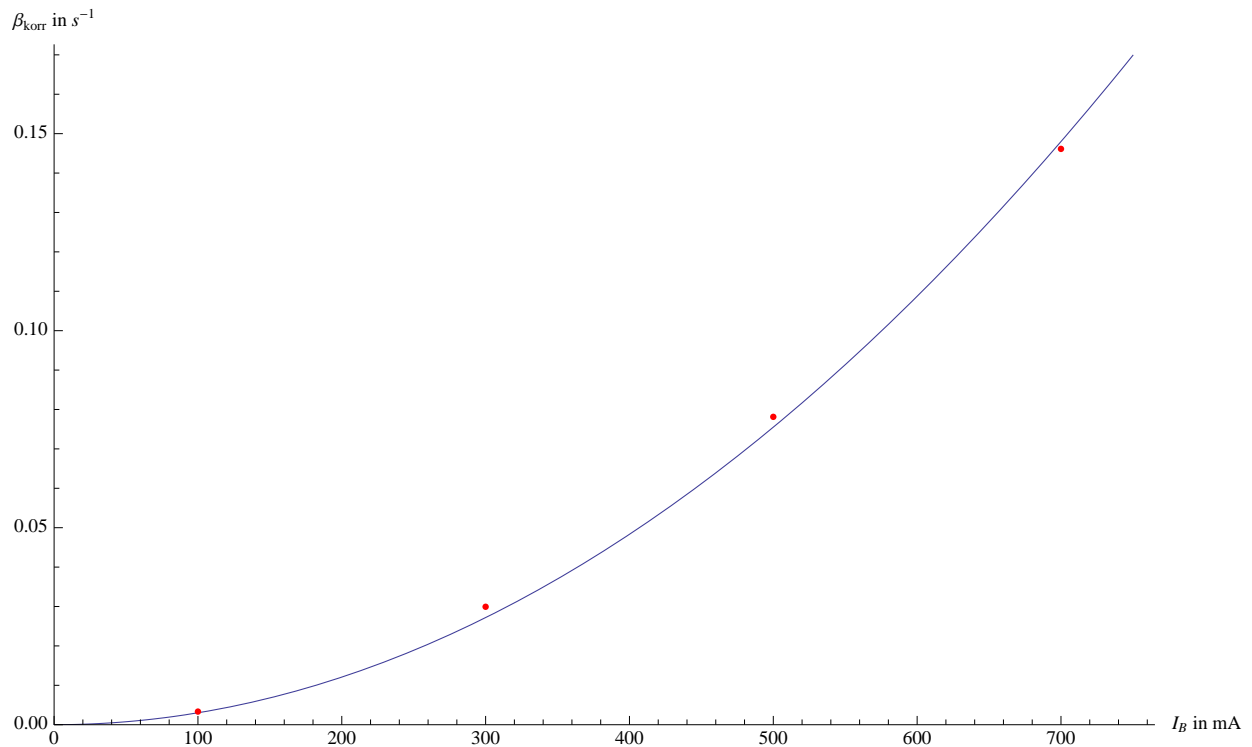


Abbildung 6: Zusammenhang zwischen  $I_B$  und  $\beta_{korr}$

Der Fit wurde mit der quadratischen Form  $a \cdot x^2$  durchgeführt, wobei wir

$$a = 3.02 \times 10^{-7} (\text{mA}^2\text{s})^{-1}$$

erhielten. Für die Grenzdämpfung gilt  $\beta_{korr} = \omega_0$ . Für die Periodendauer der ungedämpften Schwingung aus Aufgabe 1 erhielten wir  $T_0 = 1.96637 \text{ s}$ . Aus dem quadratischen Zusammenhang zwischen  $I_B$  und  $\beta_{korr}$  kann man nun den Grenzstrom interpolieren:

$$I_B = \sqrt{\frac{\omega_0}{a}} = \sqrt{\frac{3.195 \text{ s}^{-1}}{3.02 \times 10^{-7} (\text{mA}^2\text{s})^{-1}}} = 3253 \text{ mA}$$

Dieses Ergebnis passt zu unseren Messungen, da wir selbst bei 1.6 mA (dem höchsten Bremsstrom) noch recht weit vom aperiodischen Grenzfall entfernt waren.

### 2.3 Bestimmung der Güte

$I_B$ in mA	$Q$
100	210.29
300	49.44
500	21.88
700	14.26

Die Güte  $Q$  einer Schwingung wird berechnet aus

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{2\beta \cdot T}}$$

Je höher die Güte einer Schwingung ist, desto geringer ist also die Dämpfung.



### 3 Drehpendel, Winkelrichtgröße und Trägheitsmoment

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D^*$  hängten wir an den Außenrand des Drehpendels ein Gewicht, und maßen die Auslenkung  $s$ . Der Außenradius des Drehpendels betrug  $r_a = 94.7 \text{ mm}$ .

Für die Berechnung von  $D^*$  gilt:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = \varphi \cdot D^* \quad \rightarrow \quad D^* = \frac{r \cdot m \cdot g}{\varphi}$$

Die Messung verlief der Aufgabenstellung entsprechend. Daraus ergab sich nun folgende Tabelle:

Masse in g	$s_l$ in rad	$s_r$ in rad	$\bar{s}$ in rad	$D^*$ in Nm
5	-0.3579	0.3474	0.35265	0.0132
10	-0.7158	0.6947	0.70525	0.0132
20	-1.4211	1.3895	1.4053	0.0132

Aus der Winkelrichtgröße kann nun das Trägheitsmoment berechnet werden.

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T_0^2}{4\pi^2} = 1.293 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Das Ergebnis stimmt in etwa mit dem in der Vorbereitung errechneten theoretischen Wert überein.

## 4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

### 4.1 Resonanzkurven

In dieser Aufgabe haben wir die Resonanzkurve  $\varphi(\omega)$  bei den Dämpfungsströmen 300 mA und 500 mA aufgenommen. Um die Resonanzkurve zu bestimmen nahmen wir für beide Messungen die Winkel-Zeit-Diagramme bei verschiedenen Motorfrequenzen auf. In die folgenden Schaubilder haben wir jeweils unsere Messwerte und die dazugehörige theoretische Resonanzkurve eingetragen.

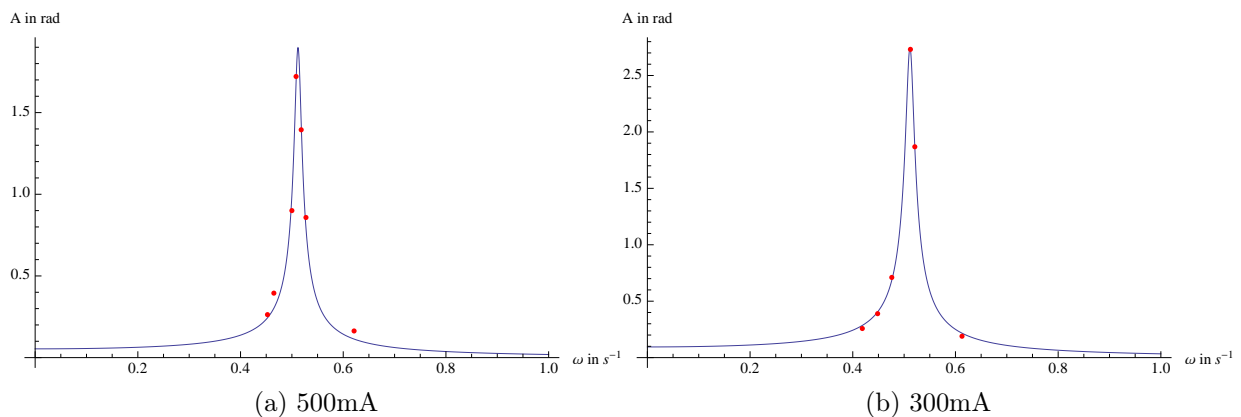


Abbildung 7: Resonanzkurven bei verschiedenen Bremsströmen

Durch den Vergleich mit den theoretischen Kurven sieht man, dass unsere Messungen relativ gut mit diesen übereinstimmen. Man sieht jedoch auch, vor allem bei der ersten Messreihe, dass unsere Messwerte nicht sehr gut geeignet sind, um einen korrekten Kurvenverlauf zu bestimmen, da wir zu wenige Messwerte in Resonanznähe haben. Die tatsächliche Höhe der Amplitude kann man nur bestimmen, wenn man auch wirklich die Resonanzfrequenz gemessen hat.

## 5 Schwingkreis, erzwungene Schwingung

In diesem Versuch wurde ein elektrischer Schwingkreis aufgebaut und untersucht. Über CASSY konnten wir ihn mit verschiedenen Frequenzen anregen und Strom, Spannung und Phasenverschiebung messen.

### 5.1 Stromstärke und Impedanz

Wir maßen an den drei Widerständen und erhielten folgende Schaubilder. Die waagrechte gestrichelte Linie ist jeweils bei  $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ , die anderen beiden Linien kennzeichnen jene Frequenzen ( $f_1$  und  $f_2$ ), bei denen die Amplitude gerade diesen Wert hat. Die Differenz dieser Frequenzen gibt uns die Resonanzbreite  $\Delta f$ , mit Hilfe derer wir die Güte der Schwingung berechnen können. Es gilt:

$$Q = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega} = \frac{f_{res}}{\Delta f}$$

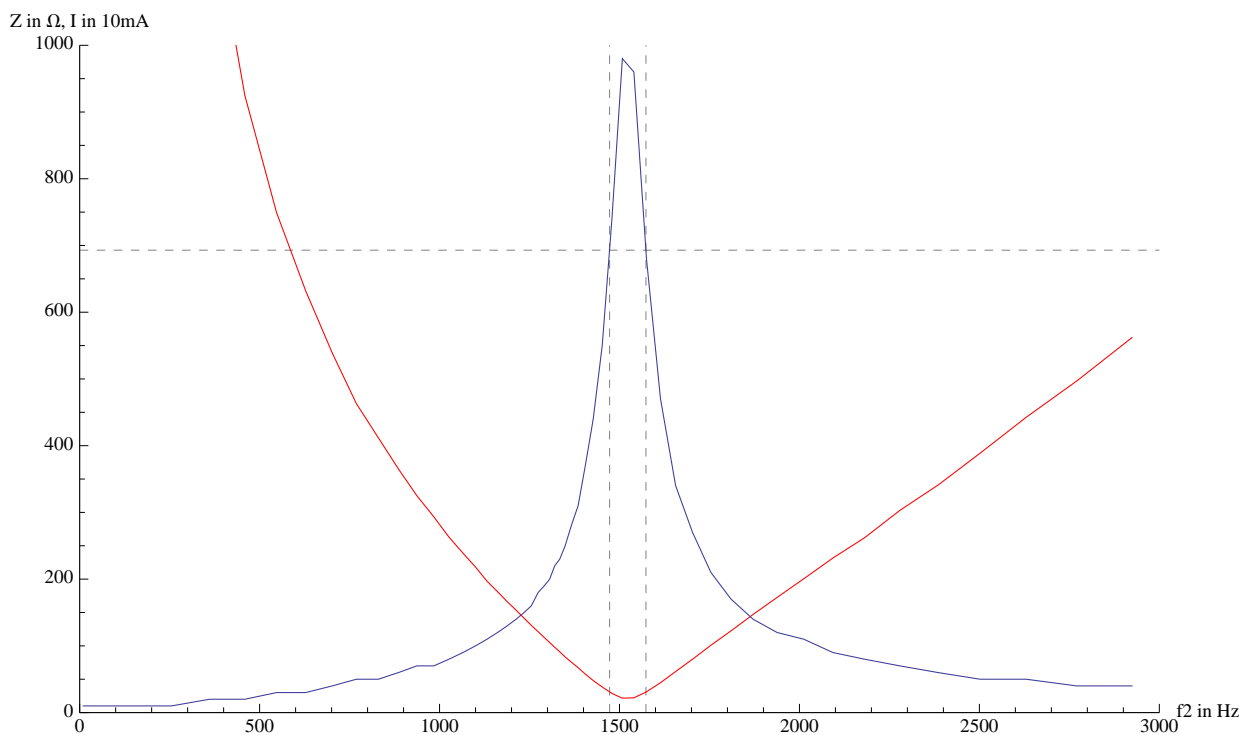


Abbildung 8: Amplitude und Impedanz bei  $R = 8.2 \Omega$

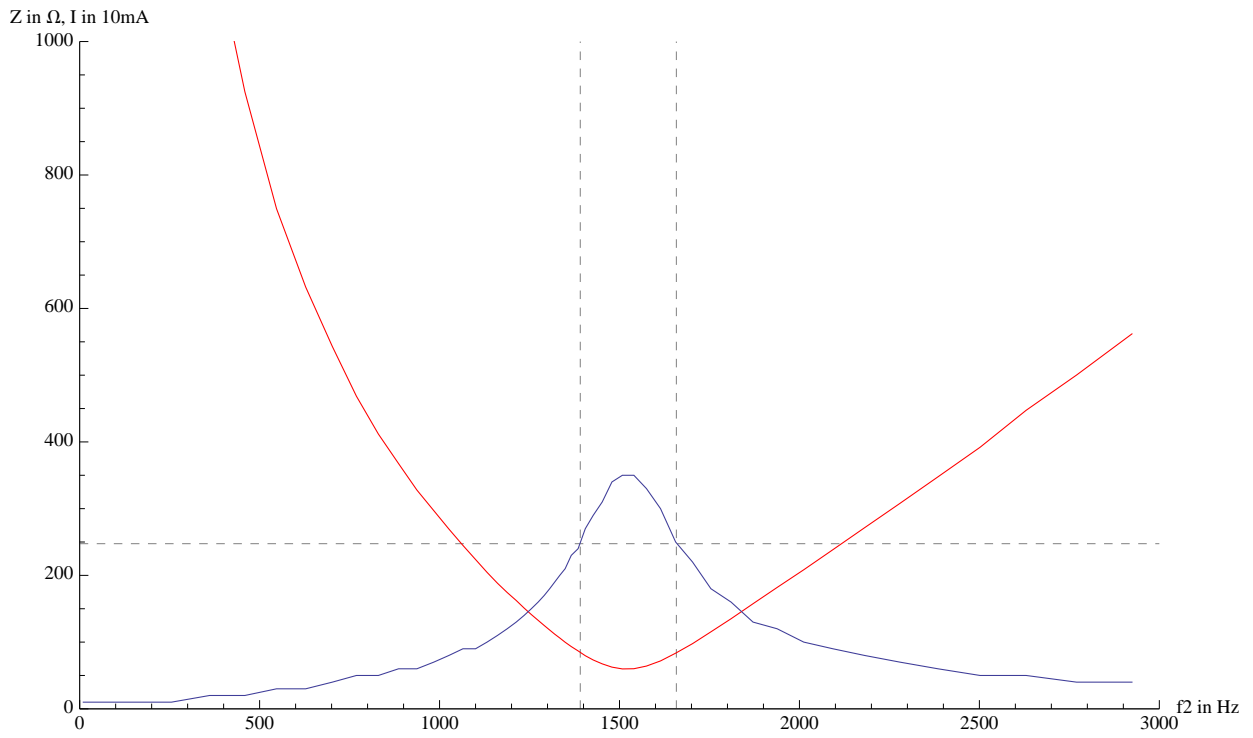


Abbildung 9: Amplitude und Impedanz bei  $R = 47 \Omega$

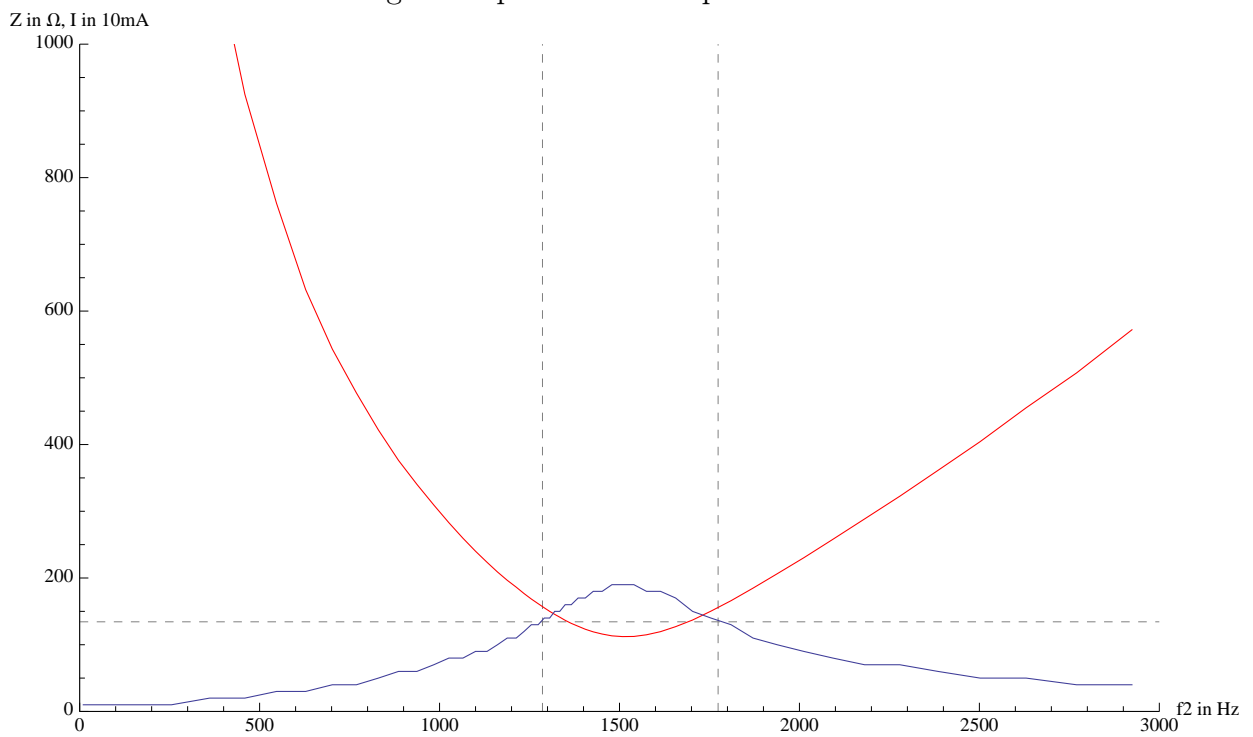


Abbildung 10: Amplitude und Impedanz bei  $R = 100 \Omega$

Man erkennt an diesen Schaubildern sehr schön, dass die Impedanz im Schwingkreis wie ein Widerstand wirkt. Je kleiner die Impedanz, desto größer die Stromstärke. Man sieht auch, dass der Widerstand zur Dämpfung beiträgt, da der Strom bei höherem Widerstand viel flacher verläuft. Es ergibt sich folgende Messtabelle:

$R$ in $\Omega$	$f_{res}$ in Hz	$I_{max}$ in mA	$\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ in mA	$f_1$ in Hz	$f_2$ in Hz	$\Delta f$ in Hz	$Q$
8.2	1523	98	69.3	1472.5	1573.5	101	15.08
47	1524.5	35	24.7	1391	1658	267	5.71
100	1530	19	13.4	1286	1774	488	3.14

Es ist deutlich zu sehen, dass die Güte des Kreises mit steigendem Widerstand abnimmt.

## 5.2 Resonanzüberhöhung

Im Resonanzfall tritt eine Spannungsüberhöhung auf. Das bedeutet, dass die Effektivspannung am Kondensator und an der Spule wesentlich höher ist, als die anliegende Effektivspannung  $U$ .

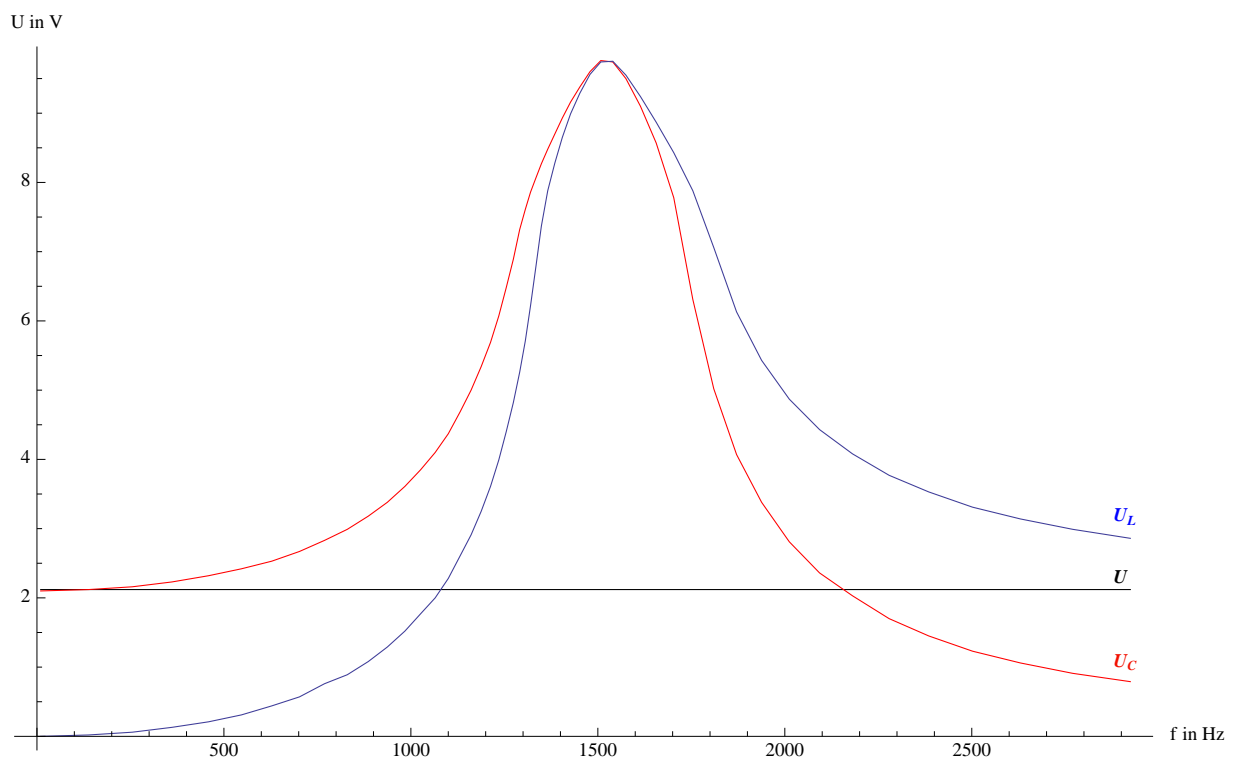


Abbildung 11: Spannungsverläufe bei  $R = 8.2 \Omega$

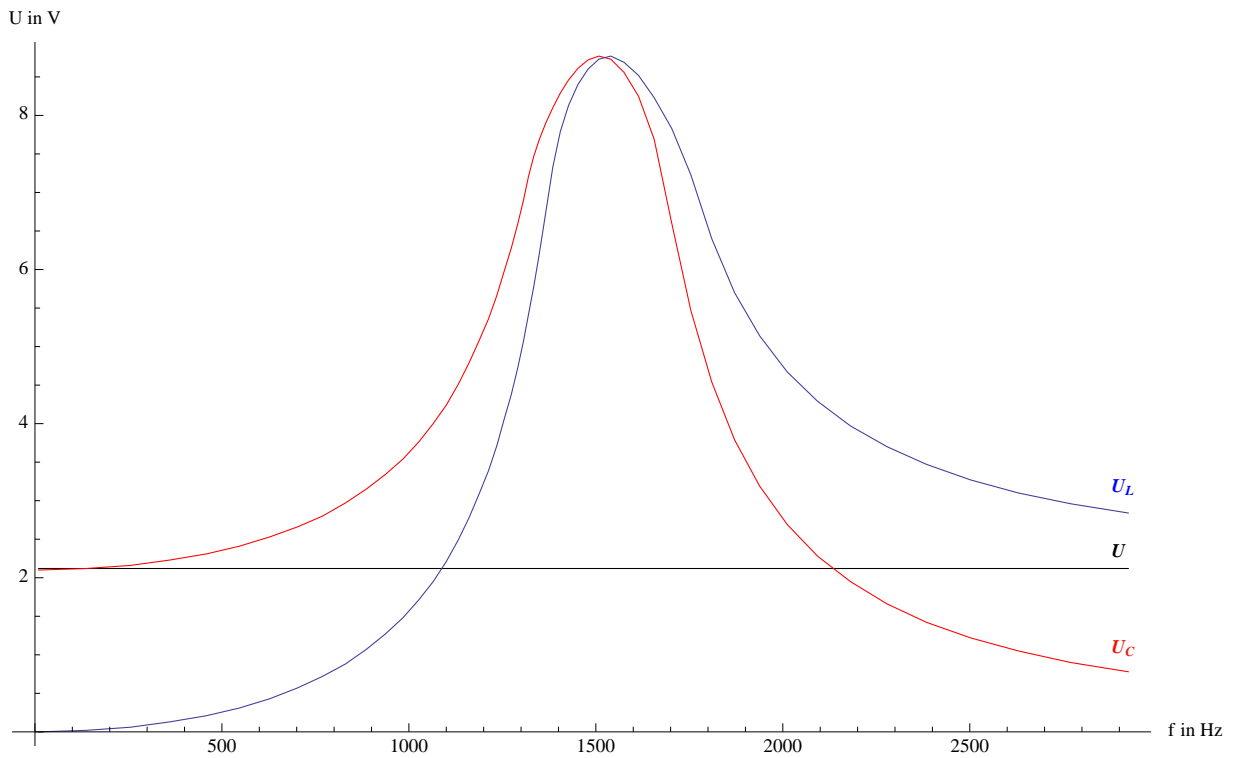


Abbildung 12: Spannungsverläufe bei  $R = 47 \Omega$

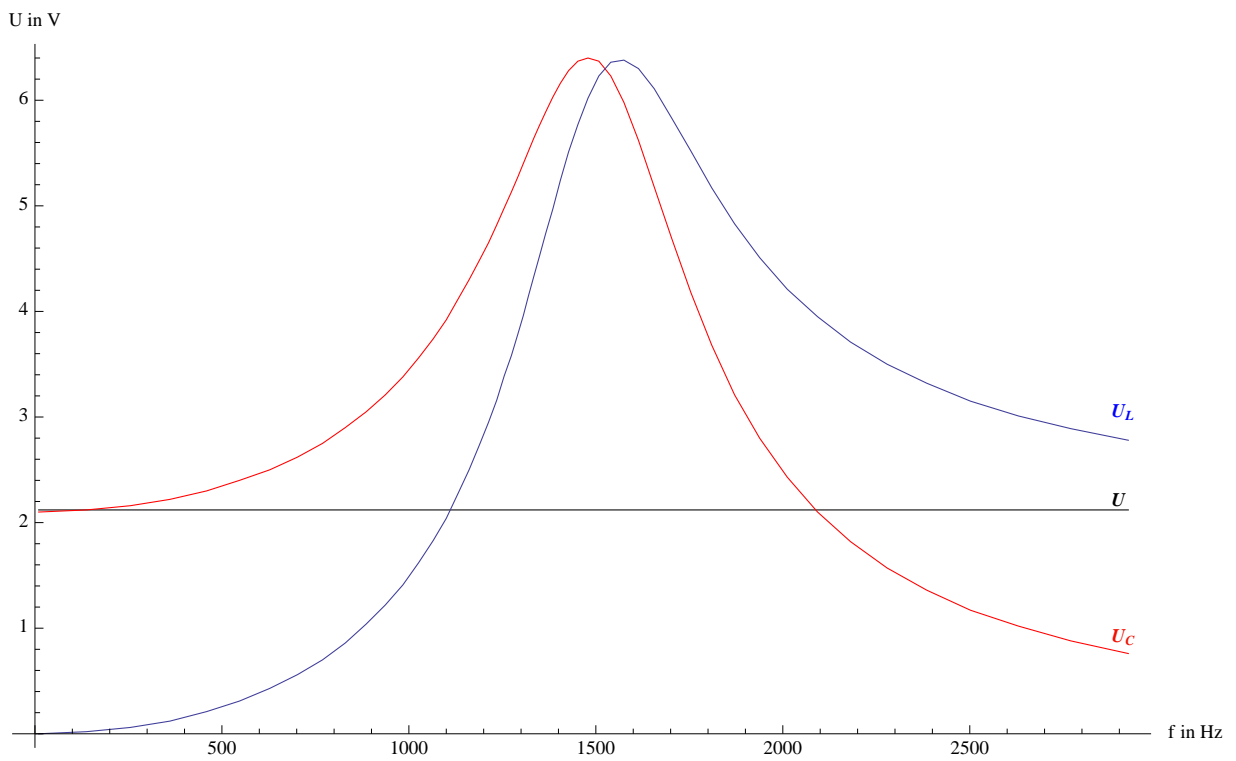


Abbildung 13: Spannungsverläufe bei  $R = 100 \Omega$

Auch hier nimmt die maximale Amplitude bei größerer Dämpfung ab. Die waagrechte Gerade ist die anregende Spannung, deren Betrag sich ja nicht ändert. Der Kondensator wird bei Gleichspannung (0 Hz) geladen, daher ist seine Spannung dort gerade gleich der angelegten Spannung. Bei hohen Frequenzen dagegen wird sie sehr klein. Die Spule hat bei Gleichspannung keinen Spannungsabfall, da diese nur durch eine Änderung der Spannung zustande kommt. Aus dem Maximalwert der Spannungsverläufe lässt sich die Güte berechnen:

$$Q = \frac{U_{Lmax}}{U_0} = \frac{U_{Cmax}}{U_0}$$

Aus unseren Messwerten ergibt sich somit folgende Tabelle:

$R$ in $\Omega$	$U_{max}$ in V	$Q$
8.2	9.76	4.60
47	8.77	4.14
100	6.4	3.02

Die Gütewerte bei  $8.2\Omega$  und  $47\Omega$  liegen wie man sieht weit neben den Werten, die wir in Unterabschnitt 5.1 bestimmt haben. Da wir der Meinung sind, richtig gerechnet zu haben, muss das Problem in den Messwerten selbst liegen. So kann es sein, dass die eigentlich zu erwartenden Spannungsmaxima nicht erreicht wurden. Um diese Vermutung zu überprüfen haben wir berechnet, welche Spannungsmaxima man bräuchte, um auf die Gütefaktoren in Unterabschnitt 5.1 zu kommen. Es ergab sich folgende Tabelle:

$R$ in $\Omega$	$U_{max}$ in V	$Q$
8.2	31.97	15.08
47	12.11	5.71
100	6.66	3.14

Wie man sieht, hätten die Spannungsmaxima viel höher als die gemessenen sein müssen, um auf die erwarteten Gütefaktoren zu kommen. Warum die tatsächlich gemessenen Spannungen nun so viel kleiner waren, darüber können wir nur spekulieren. Es könnte am Messverfahren selbst liegen, an nicht beachteten Widerständen (Kabel, Spule, Messgeräte), oder auch an etwas ganz anderem.

### 5.3 Phasenverschiebung

Auch beim elektrischen Schwingkreis kann man eine Phasenverschiebung feststellen. Die Phasenverschiebung konnten wir direkt mit CASSY messen, sodass diese auch gut über die Frequenzen aufgetragen werden kann:

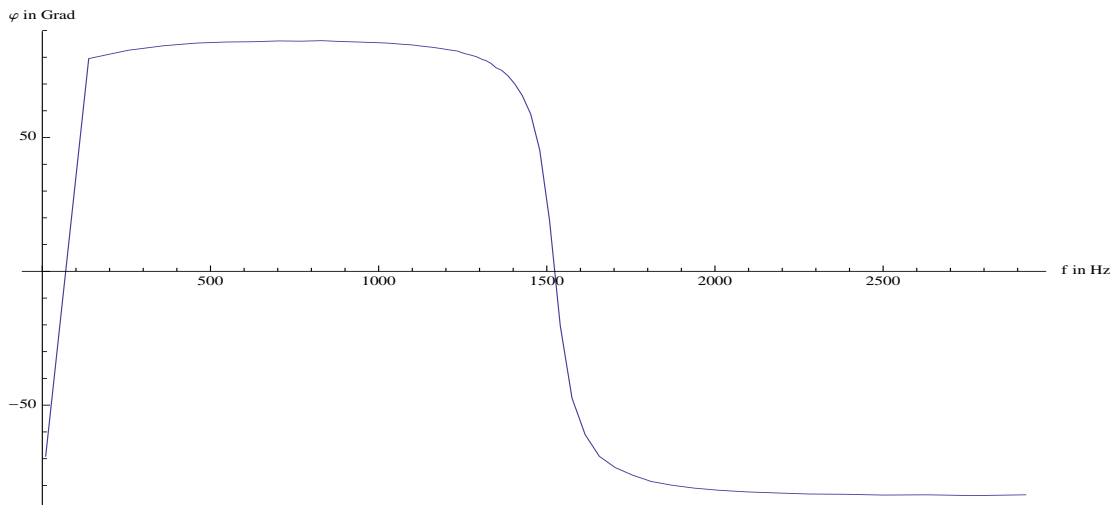


Abbildung 14: Phasenverschiebung bei  $R = 8.2 \Omega$

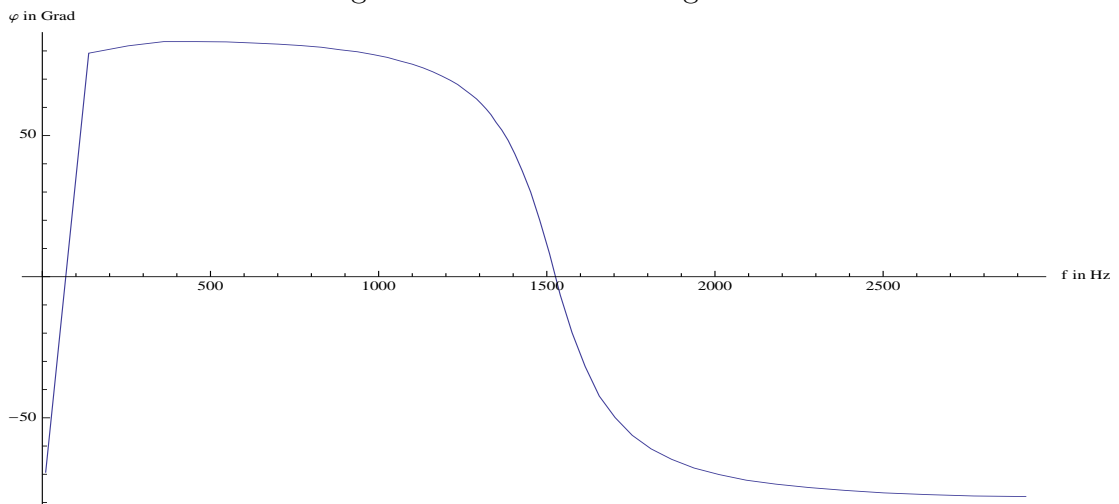


Abbildung 15: Phasenverschiebung bei  $R = 47 \Omega$

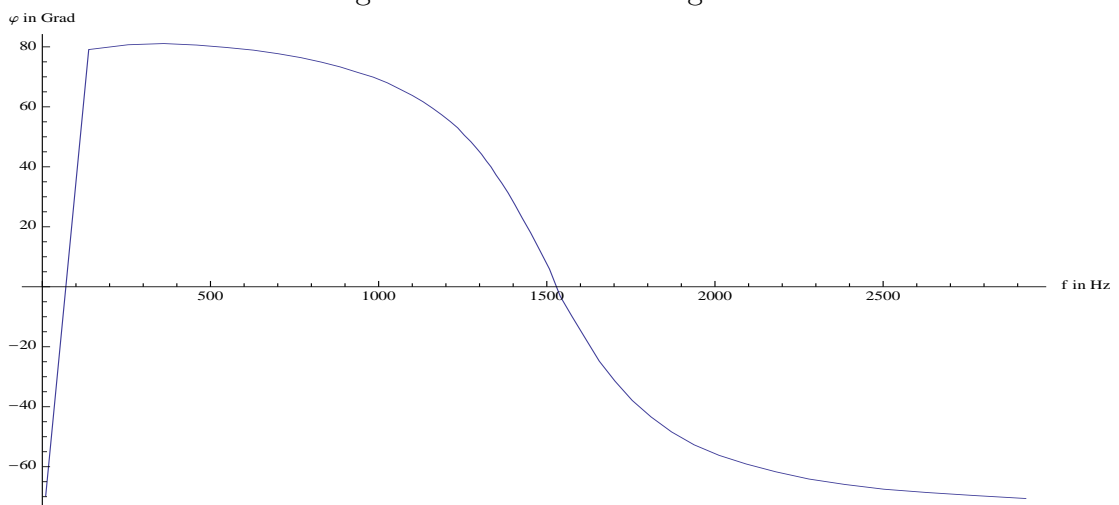


Abbildung 16: Phasenverschiebung bei  $R = 100 \Omega$



Der Sprung am linken Ende des Schaubilds kommt dadurch zustande, dass bei 0 Hz keine Aussage über eine Phasenverschiebung getroffen werden kann. Dem Wert ist also keine Beachtung zu schenken. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Verlauf der Kurve bei steigender Dämpfung durch den Widerstand flacher wird. Dadurch wird der Bereich um  $\varphi = 0$  größer. Da die Amplitude in diesem Bereich maximal wird hat dies zur Folge, dass das Maximum im Amplitudendiagramm bei größeren Widerständen breiter wird. Das ist auch gut in den Schaubildern aus Unterabschnitt 5.1 zu erkennen.