Versuch P1-22
Resonanz
Vorbereitung

Gruppe Mo-19
Yannick Augenstein

Versuchsdurchführung: 21. November 2011

Inhaltsverzeichnis

Theoretische Einführung

In dieser Versuchsreihe geht es um harmonische Schwingungen. Diese werden allgemein mit der folgenden Differentialgleichung (DGL) beschrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Hierbei sind β Dämpfungen, die proportional zur Geschwindigkeit sind. $f(t)$ ist eine treibende Kraft (erzwungene Schwingung). Die Lösung dieser DGL ist eine Linearkombination der homogenen Lösung $x_h(t)$ und einer partikulären Lösung $x_p(t)$. Die homogene Lösung lässt sich über den Ansatz $x(t) = ce^{-\lambda t}$ ermitteln. Hierbei erhält man $\lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Man muss deshalb zwischen drei Fällen unterscheiden.

Kriechfall ($\beta > \omega_0$)

$$x_h(t) = e^{-\beta t} \cdot (C_1 \cdot e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 \cdot e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}})$$

Aperiodischer Grenzfall ($\beta = \omega_0$)

$$x_h(t) = C_1 \cdot e^{-\beta t} + C_2 \cdot te^{-\beta t}$$

Schwingfall ($\beta < \omega_0$)

Hier wird die Wurzel negativ, deshalb ergeben sich für λ komplexe Lösungen.

$$x_h(t) = e^{-\beta t} \cdot (C_1 \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t}) \overset{Re}{=} e^{-\beta t} \cdot (A \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t - \alpha))$$

In allen Fällen sind C_1, C_2, A und α durch die Anfangbedingungen gegebene Konstanten.

1 Freie Schwingungen am Drehpendel

In diesem Versuch wird die Schwingung eines Pohlschen Rades untersucht. Das Pohlsche Rad ist ein drehbar gelagertes Rad, auf das eine Feder eine Rückstellkraft auswirkt sobald es aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird.
Die DGL für dieses Problem lautet

$$\Theta\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + D\phi = 0$$

Hierbei ist ϕ der Phasenwinkel des Pendels, Θ das Trägheitsmoment des Rades, γ der Reibungskoeffizient und D die Federkonstante der rücktreibenden Feder. Der Reibungskoeffizient setzt sich zusammen aus der Reibung innerhalb des Materials und der Luftreibung. Wir sollen den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels (also die Lösung der DGL) darstellen. Zudem sollen wir den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit und damit den Verlauf der kinetischen Energie darstellen.
Für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{1}{2}\Theta\dot{\phi}^2 \propto \cos^2$$

Um diese zeitlichen Verläufe darstellen zu können, muss das Trägheitsmoment des Drehpendels bekannt sein:

$$\Theta = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int \rho(r)\cdot r^2\,\mathrm{d}V = \frac{m}{2}\cdot(r_a^2 - r_i^2) \approx 1.4\times10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Zudem sollen wir eine Phasenraumdarstellung der Schwingung erstellen. Dafür müssen wir die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ über dem Phasenwinkel ϕ auftragen.
β soll durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten bestimmt werden.

2 Freie gedämpfte Schwingungen am Drehpendel

Die Messungen aus Aufgabe 1 sollen mit einer Dämpfung durch eine Wirbelstrombremse wiederholt werden. Die Wirbelstrombremse soll mit den Strömen 100 mA, 200 mA, 400 mA und 700 mA betrieben werden. Auch die Dämpfungskonstante β soll wieder bestimmt werden. Die Dämpfungskonstante kann man aus dem Dämpfungsverhältnis

$$k = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_{i-1}}{\phi_i}$$

bestimmen. Aus $k = e^{\beta\hat{t}}$ folgt $\beta = \frac{\ln k}{\hat{t}}$. $\hat{t}$ hängt praktisch nicht von I_B ab, da

$$\hat{t} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\cdot(1-\frac{\beta^2}{\omega_0^2})} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\cdot(1+\frac{\beta^2}{2\omega_0^2}+\ldots) \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Diese Näherung gilt für $\beta \ll \omega_0$, also im Fall der schwachen Dämpfung (Schwingfall).
Die Dämpfung setzt sich zusammen aus der in Aufgabe 1 genannten Reibung und der Wirbelstrombremse, also ist

$$\beta(I_B) = \beta_{ges}(I_B) - \beta(0)$$

Die Funktionsweise der Wirbelstrombremse basiert auf der Lorentzkraft:

$$\vec{F} = I_B \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Da $B = \mu_0 n I$ und $\beta \propto F$, ist $\beta \propto I^2$.
Der Gütefaktor der Schwingung ergibt sich aus dem Quotienten der Schwingungsenergie und dem Energieverlust pro Periode:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\phi_{max}^2(t)}{\phi_{max}^2(t) - \phi_{max}^2(t+\hat{t})} = 2\pi \cdot \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta \cdot (t+\hat{t})}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta \hat{t}}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$$

3 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Um die Winkelrichtgröße D zu bestimmen, lenken wir die Feder um einen Winkel ϕ mit einer tangentialen Kraft F aus. Nun misst man die Kraft, den Winkel und den Radius und berechnet D aus

$$D\phi = M = F \cdot r \quad \rightarrow \quad D = \frac{F \cdot r}{\phi}$$

Für die Eigenfrequenz gilt

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi}{T_0^2} = \frac{D}{\Theta} \quad \rightarrow \quad \Theta = \frac{D T_0^2}{4\pi}$$

4 Erzwungene Schwingungen am Drehpendel

Hier sollen wir die Resonanzkurve $\phi(\Omega)$ bei verschiedenen Bremsströmen aufzeichnen. Es wird eine antreibende Kraft der Form

$$f(t) = k \cos(\Omega t)$$

verwendet, wobei $k = \frac{M_0}{\Theta}$. Hieraus ergibt sich (s.o.) eine inhomogene DGL, deren Lösung sich aus der homogenen und partikulären Lösung zusammensetzt. Hier fällt die homogene Lösung jedoch exponentiell mit der Zeit ab, daher können wir diese (nach einer gewissen Zeit) vernachlässigen. Dadurch ist die Lösung der DGL eine Schwingung mit der angelegten Frequenz Ω:

$$\phi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \Psi)$$

Ψ ist die Phasenverschiebung und es gilt

$$\Psi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Für $\Omega \ll \omega_0$ ist die Phasenverschiebung $\Psi \approx 0$, bei der Resonanzfrequenz $\Omega \approx \omega_0$ geht der Nenner des Bruches gegen Null, hier erhalten wir die sogenannte "Resonanzkatastrophe".
Für $\Omega \gg \omega_0$ ist $\Psi = -\pi$.
Für die Amplitude A gilt

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

Um die Güte der Schwingung zu bestimmen verwenden wir den Bereich $\Delta\omega$ zwischen ω_1 und ω_2, für welchen die Amplitude auf einen Wert von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zur Amplitude im Resonanzfall abgefallen ist.

$$\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \quad \rightarrow \quad Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

5 Erzwungene Schwingungen im Serienschwingkreis

Ein Serienschwingkreis besteht aus einer mit einem Kondensator, einer Spule und einem Widerstand in Reihe geschalteten Spannungsquelle. Die Spannungsquelle erzeugt eine Wechselspannung, welche sozusagen die Schwingung erzwingt.
Auf Grund der Kirchhoffschen Maschenregel gilt

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t)$$

Daraus ergibt sich für die Schwingung

$$\ddot{I}(t) + \frac{L}{R}\dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = \frac{\dot{U}(t)}{L}$$

Wenn wir nun $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ und $\beta = \frac{R}{2L}$ substituieren, erhalten wir die uns bekannte Form eines gedämpften harmonischen Oszillatos mit antreibender Kraft. Die Lösung dieser DGL ist gegeben durch

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \cos(\omega t + \Psi) + I_0 \cdot e^{i\omega t + \Psi} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die Stromstärke I_0 können wir über die Impedanz des Schwingkreises bestimmen:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z(\omega)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Die kleinste Impedanz erhalten wir bei

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 8.7 \times 10^3\,\text{Hz}$$

Damit ergibt sich für die Frequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1320\,\text{Hz}$$

Die Phasenverschiebung Ψ ergibt sich aus

$$\Psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Der Gütefaktor ergibt sich aus

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Im Resonanzfall kann der Gütefaktor deutlich größer als 1 werden, deshalb spricht man in diesem Fall von einer Spannungsüberhöhung. Auch daraus kann man den Gütefaktor berechnen:

$$|U_L(\omega_0)| = |L\dot{I}| = \omega_0 \frac{L}{R} U_0 = Q \cdot U_0$$

$$|U_C(\omega_0)| = \left|\frac{1}{C} \cdot \int I \,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\omega_0 C R} = Q \cdot U_0$$

Daraus ergibt sich letztendlich

$$Q = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0} = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0}$$