

# Vorbereitung: Vierpole und Leitungen

Marcel Köpke  
Gruppe 7

27.11.2011

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Aufgabe 1</b>                              | <b>3</b>  |
| 1.1 Vierpole . . . . .                          | 3         |
| 1.2 RC-Spannungsteiler . . . . .                | 3         |
| 1.2.1 Hochpass . . . . .                        | 3         |
| 1.2.2 Tiefpass . . . . .                        | 4         |
| <b>2 Aufgabe 2</b>                              | <b>6</b>  |
| 2.1 Differenzierglied . . . . .                 | 6         |
| 2.2 Integrierglied . . . . .                    | 6         |
| <b>3 Aufgabe 3</b>                              | <b>7</b>  |
| 3.1 Charakteristischer Widerstand . . . . .     | 7         |
| 3.2 Grenzfrequenz . . . . .                     | 7         |
| 3.3 Kapazität und Induktivität . . . . .        | 8         |
| 3.4 Phasenverschiebung . . . . .                | 8         |
| 3.5 Reflexion am Kettenende . . . . .           | 8         |
| <b>4 Aufgabe 4</b>                              | <b>10</b> |
| 4.1 Charakteristischer Widerstand . . . . .     | 10        |
| 4.2 Verzögerungszeit . . . . .                  | 10        |
| 4.3 Reflexion . . . . .                         | 10        |
| 4.4 Relative Dielektrizitätskonstante . . . . . | 10        |

# 1 Aufgabe 1

## 1.1 Vierpole

Vierpole sind allgemein elektronische Bauteile, die je zwei paare von Anschlussklemmen besitzen (also insgesamt 4). Der innere Aufbau kann dabei von Vierpol zu Vierpol sehr unterschiedlich sein. Vierpole führen also eine bestimmte Funktion in einen Schaltkreis aus.

## 1.2 RC-Spannungsteiler

Ein RC-Spannungsteiler ist ein linearer Vierpol bestehend aus Widerstand und Kondensator. Dabei lassen sich im engeren Sinne zwei Arten unterscheiden:

- Hochpass
- Tiefpass

Im folgenden werden diese näher beschrieben.

### 1.2.1 Hochpass

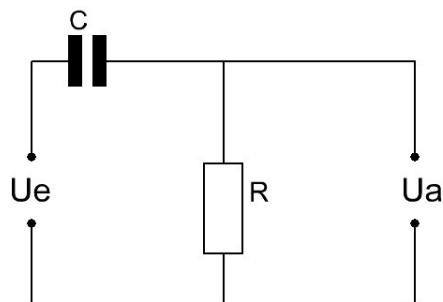


Abbildung 1.1: Hochpass

Abbildung 1.1 zeigt das Schaltbild eines Hochpasses. Die Spannungen an den Eingangs- bzw. Ausgangsklemmen seien jeweils mit  $U_e$  und  $U_a$  bezeichnet.

Im Versuch kommt eine sinus-förmige Spannung an den Eingangsklemmen zum Einsatz. Durch Aufstellen der Differentialgleichung für Strom bzw. Spannung und Einsetzen eines komplexen-Ansatzes kommt leicht folgender Zusammenhang zustande:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e$$

$$\|U_a\| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \|U_e\|$$

mit  $\omega$  der Kreisfrequenz der angelegten Spannung. Damit gilt dann auch:

$$\left\| \frac{U_a}{U_e} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

wobei  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  und  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$  gilt.

Die Spannung fällt am Kondensator ab. Die Impedanz des Kondensators ist gegeben durch:

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

Man sieht leicht, dass mit wachsender Frequenz die Impedanz immer kleiner wird. Für kleine Frequenzen ist die Impedanz und damit auch der Spannungsabfall jedoch groß. Mit einem Hochpass kann man also niederfrequente Signale unterdrücken!

Für die Phasenverschiebung des Ausgangssignals gilt:

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega RC}$$

Für hohe Frequenzen ergibt sich kaum eine Phasenverschiebung (das Signal bleibt ungestört), für kleine strebt sie jedoch gegen  $\frac{\pi}{2}$ .

Im Versuch wird die Spannung mit einem Oszilloskop gemessen. Dabei wird der Tastkopf verwendet um den Messfehler möglichst gering zu halten, da der Widerstand desselbigen vergleichsweise hoch ist.

### 1.2.2 Tiefpass

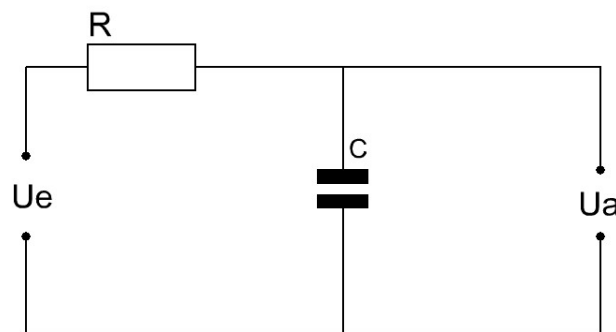


Abbildung 1.2: Tiefpass

Im Gegensatz zum Hochpass wird die Spannung hier am Kondensator abgenommen, sodass sich ein anderes Verhalten einstellt. Die Impedanz der Schaltung ist für hohe Frequenzen am größten, sodass also hochfrequente Signale unterdrückt werden können! Analog findet man:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{U_a}{U_e}\right\| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \\ \tan \varphi &= -\omega RC\end{aligned}$$

Für niedrige Frequenzen ist die Phasenverschiebung also klein (das Signal bleibt ungestört), für hohe jedoch strebt sie gegen  $-\frac{\pi}{2}$ . Auch strebt die Ausgangsspannung für hohe Eingangsfrequenzen wie erwartet gegen Null.

## 2 Aufgabe 2

Ein Hochpass bzw. Tiefpass kann unter bestimmten Voraussetzungen als Differenzier- bzw. Integrierglied verwendet werden.

### 2.1 Differenzierglied

Im Versuch wird eine Dreiecksspannung an den Hochpass angelegt. Gilt  $\frac{f}{f_0} \ll 1$  so folgt der Zusammenhang:

$$U_a = R \frac{dQ}{dt} \approx RC \frac{dU_e}{dt}$$

Die Ausgangsspannung ist also proportional zur Zeitableitung der Eingangsspannung. Daher der Name «Differenzierglied». Für zu hohe Frequenzen gilt diese Näherung nicht mehr, da der Kondensatorstrom zu groß wird.

Im Versuch sollte also eine Rechtecksspannung am Ausgang zu sehen sein.

### 2.2 Integrierglied

Im Versuch wird eine Rechtecksspannung an den Tiefpass angelegt. Gilt  $\frac{f}{f_0} \gg 1$  so folgt:

$$U_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I \cdot dt = \frac{1}{RC} \int (U_e - U_a) \cdot dt$$

Man sollte also entsprechend eine Dreiecksspannung am Ausgang sehen können.

## 3 Aufgabe 3

In diesem Versuch geht es um Drosselketten. Eine Drosselkette ist eine Hintereinanderschaltung vieler LC-Vierpole. Abbildung 3.1 zeigt eine solche Drosselkette.

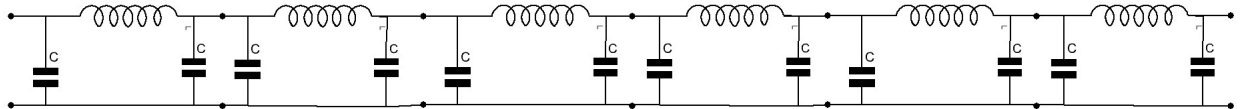


Abbildung 3.1: Drosselkette

### 3.1 Charakteristischer Widerstand

Im Versuch soll der charakteristische Widerstand  $Z_0$  einer 6 gliedrigen Drosselkette bestimmt werden. Dazu wird ein einstellbarer Abschlusswiderstand  $Z_A$  am Ende der Kette angeschlossen und eine Rechteckspannung angelegt. Nun stellt man  $Z_A$  so ein, dass möglichst keine Reflexion am Ende der Kette auftritt, sodass die Rechteckspannung unverändert bleibt. Der eingestellte Widerstand ist dann der gesuchte charakteristische Widerstand  $Z_0$ .

Für  $Z_0$  gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

wobei  $f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$  ist. Die Näherung gilt für  $\frac{f}{f_0} \ll 1$ .

### 3.2 Grenzfrequenz

Die Grenzfrequenz  $f_0$  ist theoretisch:

$$f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Zur Bestimmung wird nun allerdings eine sinusförmige Spannung an die Drosselkette angelegt und der Abschlusswiderstand auf  $Z_0$  eingestellt. Man beobachtet nun die Ausgangsspannung an  $Z_A$  für steigende Frequenzen. Dabei muss  $Z_A$  natürlich immer wieder auf  $Z_0$  nachgeregelt werden, da dieser Frequenzabhängig ist. Die Grenzfrequenz  $f_0$  liegt in einem Bereich bei dem sich das Verhältnis  $\frac{U_a}{U_e}$  stark mit der Frequenz ändert.

### 3.3 Kapazität und Induktivität

Für  $\frac{f}{f_0} \ll 1$  gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$f_0 = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Damit folgt dann:

$$C = \frac{1}{\pi Z_0 f_0}$$
$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

### 3.4 Phasenverschiebung

Um die Phasenverschiebung zwischen Eingangss- und Ausgangssignal zu messen wird ein Zweikanal-Oszilloskop verwendet. Bei  $n$  Gliedern ist die  $n$ -fache Phasenverschiebung eines einzelnen Glieds zu erwarten:

$$\varphi = 2n \cdot \arcsin \frac{f}{f_0}$$

bzw.

$$f = f_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)$$

Trägt man also  $f$  gegen  $\sin\left(\frac{\varphi}{2n}\right)$  auf, so erhält man aus der Steigung der resultierenden Gerade  $f_0$ .

Noch anzumerken ist, dass die Phasenverschiebung am Oszilloskop in Sekunden gemessen wird. Die Umrechnung in Bogenmaß erfolgt dann nach:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = \omega \cdot \Delta t$$

### 3.5 Reflexion am Kettenende

Man stellt nun  $Z_A = 0\Omega$  ein und legt eine Rechteckspannung mit  $f = 20kHz$  an. Da  $Z_A \neq Z_0$  gewählt wurde, kommt es zu Reflexionseffekten am Kettenende. Das Eingangs- und Reflexionssignal werden miteinander interferieren. Jedoch ist es stark abhängig von der Länge (Stichwort: stehende Welle) und dem Dämpfungsfaktor der Kette welche Form das resultierende Signal tatsächlich haben wird. Zudem kann es noch zu Reflexion zwischen den Kettengliedern kommen, sodass eine gestörte Rechteckspannung zu erwarten ist. Eine einfache Idee ist in Abbildung 3.2 zu sehen.



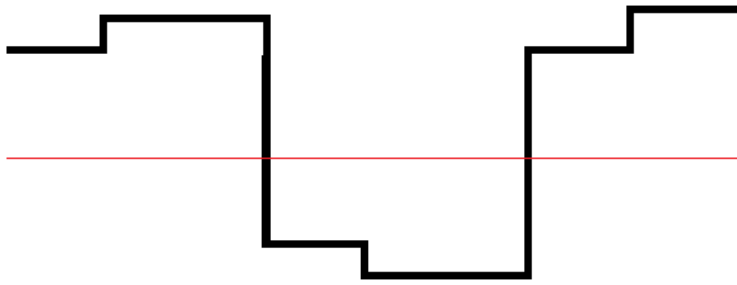


Abbildung 3.2: mögliche Spannungs-Form

## 4 Aufgabe 4

In diesem Abschnitt geht es um das Koaxialkabel und seine theoretische Beschreibung. Das Koaxialkabel ist eine homogene Leitung und kann als Hintereinanderschaltung von unendlich vielen infinitesimal kleinen Vierpolen gesehen werden. Da Kapazität und Induktivität längenabhängig sind werden  $L' = \frac{L}{l}$  und  $C' = \frac{C}{l}$  angegeben.

### 4.1 Charakteristischer Widerstand

Der charakteristische Widerstand  $Z_0$  wird analog zum Versuch 3.1 bestimmt. Da kaum Verluste auftreten kann  $Z_0$  als dispersionslos angesehen werden.

### 4.2 Verzögerungszeit

Für die Verzögerungszeit  $\tau'$  gilt:

$$\tau' = \frac{1}{v} = \frac{\Delta t}{l}$$

Die Phasenverschiebung  $\Delta t$  wird analog zu Versuch 3.4 bestimmt. Bei bekannter Kabellänge  $l$  ergibt sich dann die Verzögerungszeit.

### 4.3 Reflexion

Auch hier kann durch kurzschließen der Kabelenden Reflexion beobachtet werden. Da das Signal zweimal die Kabellänge durchläuft bevor es wieder am Eingang ankommt gilt hier:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l}$$

### 4.4 Relative Dielektrizitätskonstante

Allgemein gilt:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Damit folgt:

$$\epsilon_r = \frac{\tau'^2 c^2}{\mu_r}$$

Mit dieser Formel lässt sich  $\epsilon_r$  mit den Werten aus Versuch 4.2 und 4.3 berechnen.

Für den charakteristischen Widerstand gilt für  $\frac{f}{f_0} \ll 1$ :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

mit  $L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$  und  $C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$  folgt:

$$\epsilon_r = \frac{\mu_0^2 \mu_r c^2}{4\pi^2 Z_0^2} \ln^2\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Damit bestimmt sich  $\epsilon_r$  aus den Messwerten von Versuch 4.1.