

Praktikumsprotokoll

Kreisel

André Schendel, Silas Kraus
Gruppe DO-20

10. Juli 2012

1 Drehimpulserhaltung

Zur Einstimmung wurden die in der Vorbereitungshilfe beschriebenen Versuche mit dem Drehhocker und dem Fahrradkreisel durchgeführt. Die Erwartungen wurden bestätigt: Bei Impulsänderung des Fahrradkreisels wirkte auf den Hocker ein entsprechender Gegenimpuls. Auch das Prinzip des Trägheitsmoments konnte überprüft werden, indem der Experimentator zwei Massen näher oder weiter von der Drehachse hielt und sich so seine Drehfrequenz änderte.

2 Freie Achsen

Eine Zigarrenbox wurde mit einer Schnur jeweils an einer ihrer 3 Hauptträgheitsachsen aufgehängt und die Schnur durch einen Motor in Drehung versetzt. Wie erwartet zeigte sich, dass bei Frequenzerhöhung die Drehung um die kürzeste bzw. länste Achse (größtes bzw. kleinstes Trägheitsmoment) immer stabiler wurde, während die Kiste bei Rotation um die mittlere Achse ins Trudeln geriet und sich bei höheren Frequenzen aufstellte und um eine der freien Achsen rotierte.

Der Grund dafür liegt in den Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned}M_1 &= \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 \\M_2 &= \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 \\M_3 &= \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2\end{aligned}$$

Wenn der Körper um eine der Hauptträgheitsachsen rotiert, wird die entsprechende Komponente $\dot{\omega} = 0$. Dann gilt für die beiden anderen Achsen:

$$\ddot{\omega}_i = -A(\Theta_i) \cdot \omega_i$$

Für die 1. und 3. Hauptträgheitsachse ist A positiv. Also sind die Lösungen obiger Gleichung harmonische Oszillatoren. Die Drehung wird also stabil bleiben. Bei der 2. Achse wird A negativ. Dann ist die Lösung eine Exponentialfunktion und die Drehung wird instabil.

Außerdem wurde diskutiert, dass bei einem ideal im Schwerpunkt aufgehängten, störungsfreien Kreisel auch die mittlere Achse stabil wäre.

3 Kräftefreier Kreisel

Der kardanisch und kräftefrei aufgehängte Kreisel wurde in Rotation versetzt. Durch gezielte Stöße wurde eine Nutation provoziert, deren Frequenz ebenso wie die Rotationsfrequenz mit Lichtschranken gemessen werden konnte. Die Messungen wurden zunächst ohne, dann mit Zusatzgewichten ($m=1000\pm 1g$) am äußeren Kardanrahmen durchgeführt. Es wurden folgende Werte gemessen:

Tabelle 1: Rotationsfrequenz f und Nutationsfrequenz f_N ohne Gewichte

Messung 1		Messung 2		Messung 3	
Rotation f [Hz]	Nutation f_N [Hz]	Rotation f [Hz]	Nutation f_N [Hz]	Rotation f [Hz]	Nutation f_N [Hz]
29.17	15.19	27.26	14.19	26.49	13.79
28.95	14.5	26.7	13.8	25.53	13.32
26.8	13.89	25.13	13.13	24.21	12.58
19.02	19.77	23.71	12.39	23.62	12.24
18.06	18.72	23.1	12.04	22.49	11.73
17.01	8.66	21.07	11	21.92	11.44
		20.16	10.38	20.85	10.89
		19.49	10.1	20.29	10.42
		18.99	9.78	19.29	10.09
		17.98	9.28	16.9	8.76
		16.31	8.69	16.17	8.32
		14.65	7.66	12.72	6.8
		12.48	6.27	10.91	5.63
		11.93	6.18	9.43	4.99
				8.26	4.66

Tabelle 2: Rotationsfrequenz f und Nutationsfrequenz f_N mit Gewichten

1. Messung		2. Messung	
Rotation f [Hz]	Nutation f_N [Hz]	Rotation f [Hz]	Nutation f_N [Hz]
28.31	16.93	26.58	7.95
26.63	16.28	25.22	7.59
25.95	7.79	21.32	6.35
25.18	7.78	19.67	5.91
24.56	7.29	18.49	5.42
23.97	7.22	17.65	4.95
23.3	7.23	16.81	4.68
21.75	6.61	16.27	4.77
20.61	6.15	14.5	4.42
19.96	8.82	13.01	4.16
19.16	5.82	10.58	3.05
17.96	5.45	9.8	2.81
17.26	5.28	9.05	2.53
16.15	4.88		
15.58	6.01		
14.83	4.32		
10.61	3.16		
9.55	2.96		
8.64	3.36		
7.11	2.52		

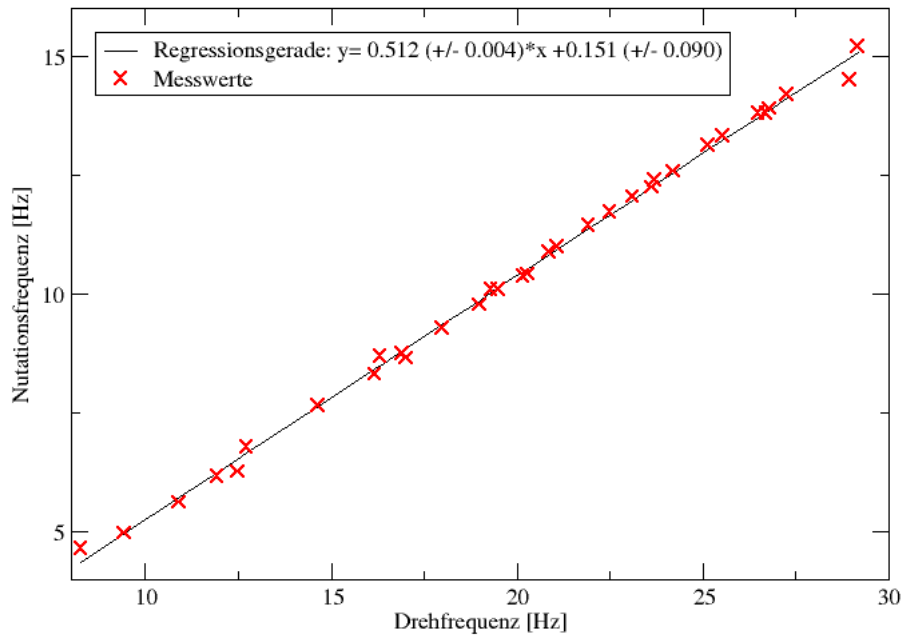


Abbildung 1: Nutationsfrequenz f_N in Abhängigkeit von der Drehfrequenz f ohne Gewichte

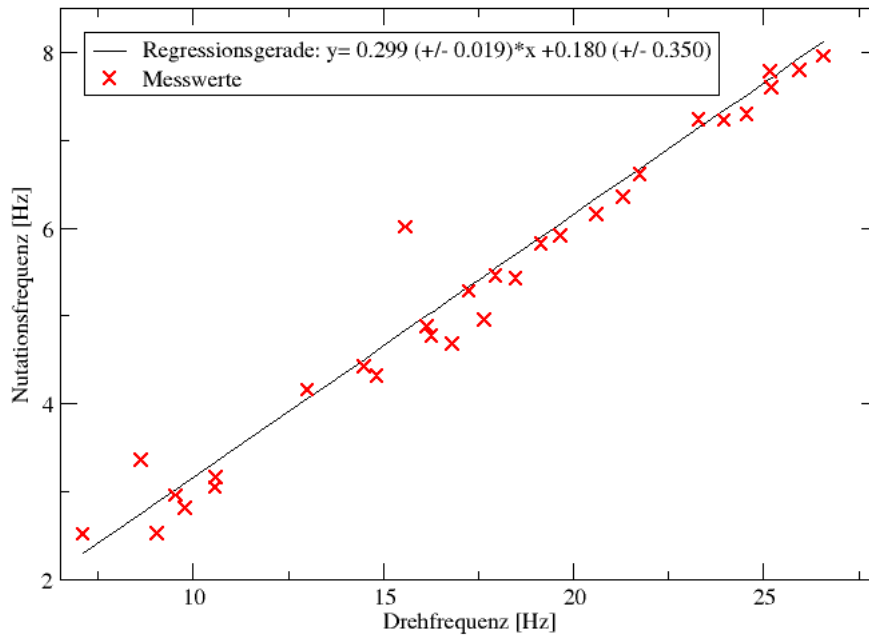


Abbildung 2: Nutationsfrequenz f_N in Abhängigkeit von der Drehfrequenz f mit Gewichten

Da während des Schlags auf den Kardanrahmen stets für einen kurzen Moment Präzession auftrat, verschob

sich der Kreisel mit jeder Messung ein Stück und so war es bisweilen schwierig, mit den Lichtschranken korrekte Werte aufzunehmen. Daher konnten einige Ausreißer nicht vermieden werden. (In beiden Diagrammen wurden je zwei Messwerte eliminiert, die um mehr als 100% abwichen.) Dennoch zeigt sich aus den Diagrammen deutlich, dass Rotation und Nutation linear zusammenhängen.

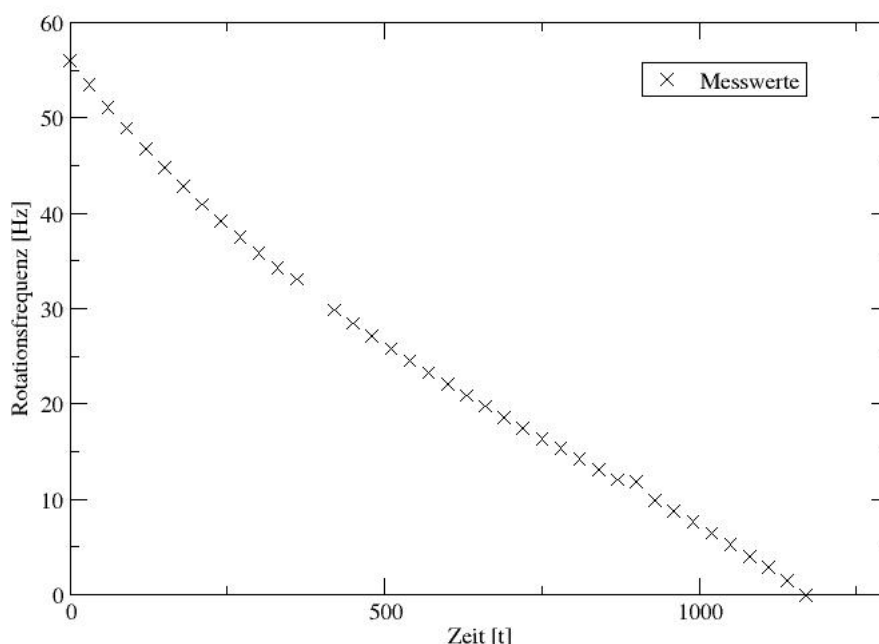
Die Steigungen der Ausgleichsgeraden seien

$$N_{ohne} = 0,512 \pm 0,004 \quad \text{und} \quad N_{mit} = 0,299 \pm 0,019$$

4 Dämpfung

Der Kreisel wurde kräftefrei gelagert und auf $60 \frac{U}{min}$ beschleunigt. Dann wurde die Drehfrequenz in 30s- Intervallen gemessen, um die Dämpfung der Rotation durch Reibung darzustellen. (Messwerte, siehe Messprotokoll zu Beginn des Dokuments).

Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit



Bei Frequenzen unterhalb von 10Hz endet der exponentiell fallende Verlauf der Kurve. Vermutlich sind die Kugellager des Kreisels nicht mehr gänzlich intakt. Während des ganzen Praktikums fiel auf, dass der Kreisel der Nachbargruppe wesentlich schwächer gedämpft wurde.

5 äußere Drehmomente

An den inneren Kardanrahmen wurde eine Stange geschraubt, die durch die Gravitation eine konstante Kraft auf den Kreisel bewirkte. Die so entstehende Präzession wurde gemessen mittels einzelner Wertepaare aus momentaner Rotationsfrequenz und der korrelierenden Zeit, in der die Präzessionsbewegung einen Umlauf beendete. Zusätzlich wurde noch ein Gewicht ($m = 375 \pm 1g$) auf die Stange geschraubt, einmal direkt am Ansatz, einmal 10cm entfernt.

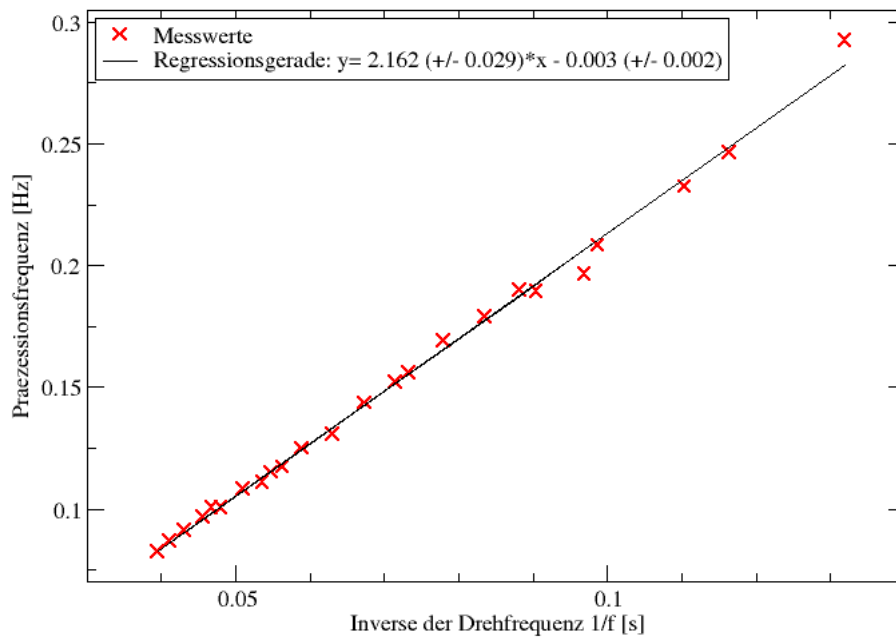


Abbildung 3: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz ohne Gewicht

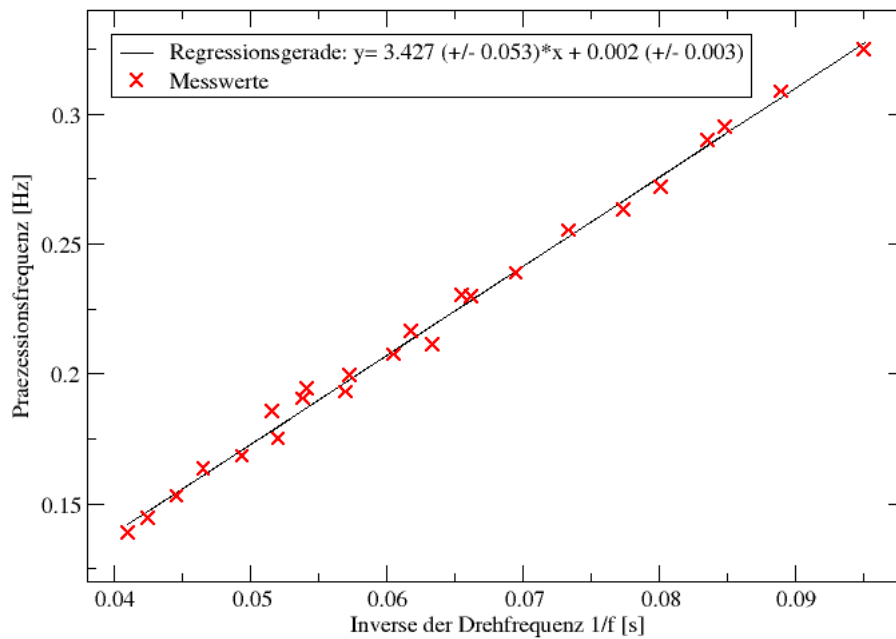


Abbildung 4: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz mit Gewicht beim 0. Strich

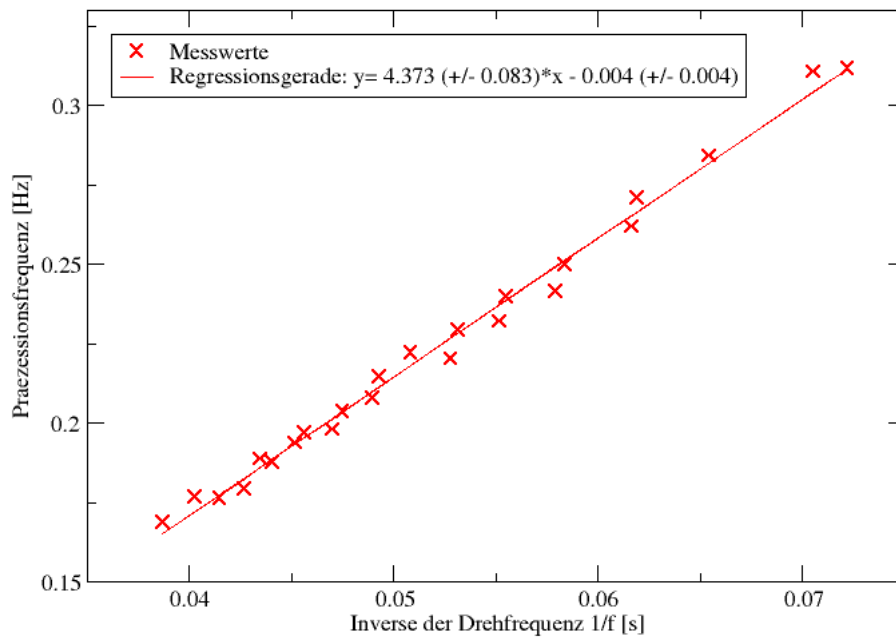


Abbildung 5: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz mit Gewicht beim 10. Strich

Die Drehfrequenz wurde invers aufgetragen, um einen linearen Zusammenhang zu erhalten und mittels einer Regressionsgeraden den Proportionalitätsfaktor bestimmen zu können, der in Aufgabe 6 zur Berechnung der Hauptträgheitsmomente verwendet werden soll. Wie nicht anders zu erwarten nimmt die Präzession mit steigender Krafteinwirkung zu.

Die Steigungen der Ausgleichsgeraden sind:

$$P_{ohne} = 2,162 \pm 0,029 \quad ; \quad P_{G0} = 3,427 \pm 0,053 \quad \text{und} \quad P_{G10} = 4,373 \pm 0,083$$

Allerdings war die Zeitmessung für die Präzessionsfrequenz in diesem Versuch stark fehlerbehaftet, da sie manuell mit der Stoppuhr durchgeführt wurde. Deshalb wurden die Graphen noch einmal mit einer Korrektur der Zeitmessung von 0.5s aufgetragen.

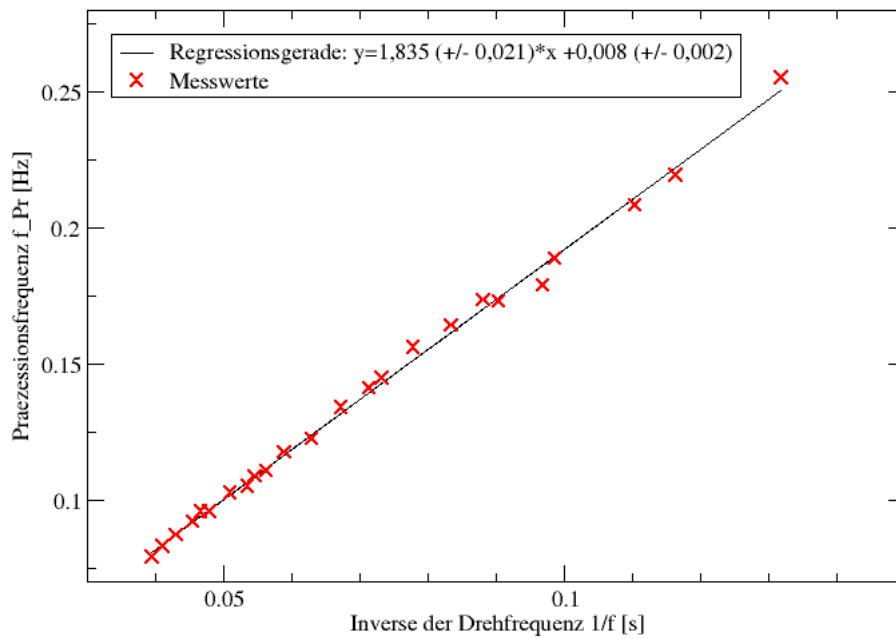


Abbildung 6: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz ohne Gewicht mit ver-
rechnetem Zeitmessfehler von 0,5s

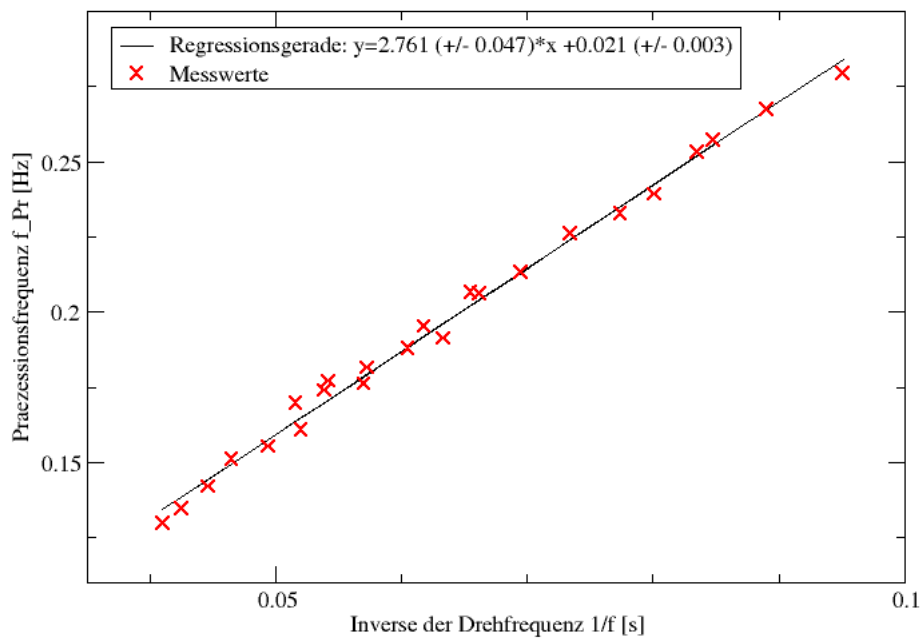


Abbildung 7: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz mit Gewicht beim 0.
Strich mit verrechnetem Zeitmessfehler von 0,5s

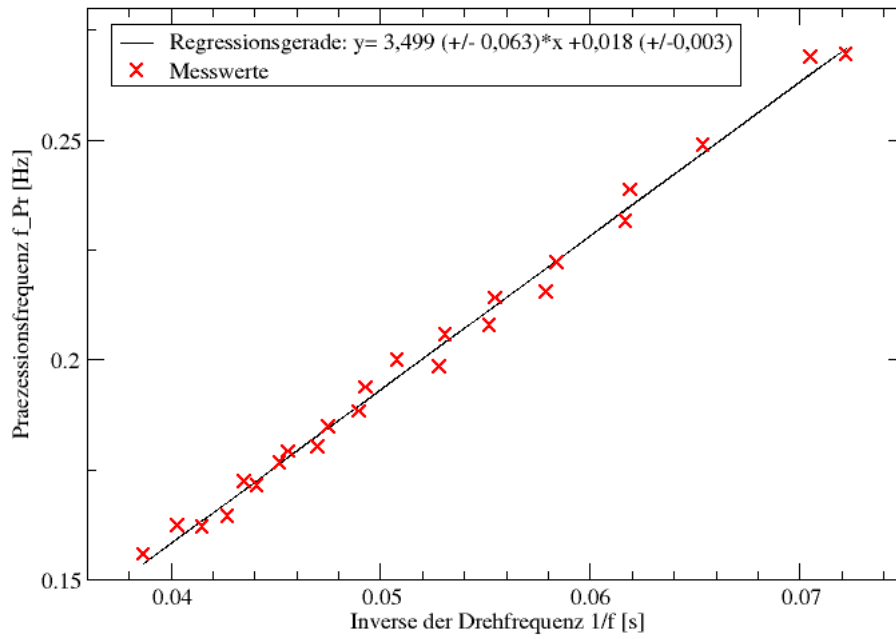


Abbildung 8: Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Inversen der Drehfrequenz mit Gewicht beim 10. Strich mit verrechnetem Zeitmessfehler von 0,5s

Berücksichtigt man also die menschliche Fehlerquelle mit 0.5s, so ergeben sich doch schon deutliche Unterschiede in den Steigungen der Regressionsgeraden zu denen in den Graphen ohne Zeitfehler.

Tabelle 3: Gegendarstellung der Messwerte der Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit vom Gewicht und der Drehfrequenz mit und ohne systematischen Fehler auf die Zeitmessung von 0,5s

ohne Gew.			Gew. bei 0cm			Gew. bei 10cm		
f [Hz]	t [s]		f [Hz]	t [s]		f [Hz]	t [s]	
25.3	12.12		24.4	7.2		24.1	5.67	
21.4	9.94		22.43	6.54		23	5.3	
19.62	9.23		21.49	6.12		22.14	5.16	
18.27	8.69		19.37	5.39		21.27	5.05	
16.97	8		18.56	5.25		20.42	4.81	
13.64	6.41		17.45	5.01		19.67	4.5	
12.83	5.91		16.19	4.62		18.82	4.36	
11.98	5.59		15.26	4.34		18.02	4.17	
11.06	5.28		12.48	3.68		17.13	4	
10.13	4.8		11.79	3.39		16.15	3.69	
9.06	4.3		23.54	6.92		15.28	3.52	
24.34	11.53		20.24	5.94		14.18	3.22	
23.2	10.96		19.22	5.71		13.85	3.21	
21.96	10.35		18.46	5.15		25.84	5.92	
20.83	9.94		17.54	5.18		24.84	5.66	
18.67	9		16.53	4.82		23.42	5.58	
17.76	8.53		15.79	4.73		22.7	5.33	
15.87	7.66		15.1	4.35		21.92	5.08	
14.86	6.96		14.39	4.19		21.05	4.91	
14	6.58		13.63	3.92		20.28	4.66	
11.34	5.26		12.92	3.8		18.94	4.54	
10.32	5.09		11.97	3.45		18.13	4.31	
8.59	4.06		11.24	3.24		17.27	4.14	
7.58	3.42		10.52	3.08		16.22	3.82	
	ohne F.	mit F.		ohne F.	mit F.		ohne F.	mit F.
$\frac{1}{f}$	f_{Pr}	f_{Pr}	$\frac{1}{f}$	f_{Pr}	f_{Pr}	$\frac{1}{f}$	f_{Pr}	f_{Pr}
0.0395	0.0825	0.0792	0.0410	0.1389	0.1299	0.0415	0.1764	0.1621
0.0467	0.1006	0.0958	0.0446	0.1529	0.1420	0.0435	0.1887	0.1724
0.0510	0.1083	0.1028	0.0465	0.1634	0.1511	0.0452	0.1938	0.1767
0.0547	0.1151	0.1088	0.0516	0.1855	0.1698	0.0470	0.1980	0.1802
0.0589	0.1250	0.1176	0.0539	0.1905	0.1739	0.0490	0.2079	0.1883
0.0733	0.1560	0.1447	0.0573	0.1996	0.1815	0.0508	0.2222	0.2000
0.0779	0.1692	0.1560	0.0618	0.2165	0.1953	0.0531	0.2294	0.2058
0.0835	0.1789	0.1642	0.0655	0.2304	0.2066	0.0555	0.2398	0.2141
0.0904	0.1894	0.1730	0.0801	0.2717	0.2392	0.0584	0.2500	0.2222
0.0987	0.2083	0.1887	0.0848	0.2950	0.2571	0.0619	0.2710	0.2387
0.1104	0.2326	0.2083	0.0425	0.1445	0.1348	0.0654	0.2841	0.2488
0.0411	0.0867	0.0831	0.0494	0.1684	0.1553	0.0705	0.3106	0.2688
0.0431	0.0912	0.0873	0.0520	0.1751	0.1610	0.0722	0.3115	0.2695
0.0455	0.0966	0.0922	0.0542	0.1942	0.1770	0.0387	0.1689	0.1558
0.0480	0.1006	0.0958	0.0570	0.1931	0.1761	0.0403	0.1767	0.1623
0.0536	0.1111	0.1053	0.0605	0.2075	0.1880	0.0427	0.1792	0.1645
0.0563	0.1172	0.1107	0.0633	0.2114	0.1912	0.0441	0.1876	0.1715
0.0630	0.1305	0.1225	0.0662	0.2299	0.2062	0.0456	0.1969	0.1792
0.0673	0.1437	0.1340	0.0695	0.2387	0.2132	0.0475	0.2037	0.1848
0.0714	0.1520	0.1412	0.0734	0.2551	0.2262	0.0493	0.2146	0.1938
0.0882	0.1901	0.1736	0.0774	0.2632	0.2326	0.0528	0.2203	0.1984
0.0969	0.1965	0.1789	0.0835	0.2899	0.2532	0.0552	0.2320	0.2079
0.1164	0.2463	0.2193	0.0890	0.3086	0.2674	0.0579	0.2415	0.2155
0.1319	0.2924	0.2551	0.0951	0.3247	0.2793	0.0617	0.2618	0.2315
P_{ohne}	2.162	1.835	P_{G0}	3.427	2.761	P_{G10}	4.373	3.499
	ΔP_{ohne}	0.327	g	ΔP_{G0}	0.666		ΔP_{G10}	0.874

6 Hauptträgheitsmomente

Aus den Ergebnissen der vorherigen Messungen sollen nun die drei Hauptträgheitsmomente Θ_x , Θ_y und Θ_z berechnet werden.

Die Steigungen der Ausgleichsgeraden sind:

$$\begin{aligned} N_{ohne} &= 0,512 \pm 0,004 \\ N_{mit} &= 0,299 \pm 0,019 \\ P_{ohne} &= 2,162 \pm 0,029 & \Delta P_{ohne} &= 0,327 \\ P_{G0} &= 3,427 \pm 0,053 & \Delta P_{G0} &= 0,666 \\ P_{G10} &= 4,373 \pm 0,083 & \Delta P_{G10} &= 0,874 \end{aligned}$$

6.1 Berechnung von Θ_x

$\Theta_{Gewicht}$

Das Trägheitsmoment der Gewichte, das später zur Berechnung von Θ_x genutzt wird, lässt sich mit deren gegebenen Zylindermassen ($m_{Zyl} = 1000 \pm 1g$), Durchmessern ($d = 4cm$) und dem Abstand zum Kreiselschwerpunkt ($r_{aR} = 14.91cm$), sowie dem Satz von Steiner berechnen:

$$\Theta_{Gewicht} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} m_{Zyl} \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_{Zyl} \left(r + \frac{d}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot m_{Zyl} \cdot (r_{aR}^2 + r_{aR}d + \frac{3}{8}d^2) = 0,0575kgm^2$$

Des Weiteren ergibt sich noch ein systematischer Fehler. Ein statistischer Fehler tritt bei dieser Rechnung nicht auf und ergibt deshalb

$$\sigma_{\Theta_{Gewicht}} = 0$$

Der systematische Fehler wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet, da eine Korrelation zwischen den einzelnen Messfehlern nicht auftritt.

$$\Delta\Theta_{Gewicht} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial m} \right)^2 \cdot \Delta m^2 + \left(\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial d} \right)^2 \cdot \Delta d^2 + \left(\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial r_{aR}} \right)^2 \cdot \Delta r_{aR}^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial m} = 2 \cdot (r_{aR}^2 + r_{aR} \cdot d + \frac{3}{8} \cdot d^2) = 0,058m^2$
- $\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial d} = 2 \cdot m_{Zyl} \cdot (r_{aR} + \frac{3}{4}d) = 0,358kgm$
- $\frac{\partial\Theta_{Gewicht}}{\partial r_{aR}} = 2 \cdot m_{Zyl} \cdot (2 \cdot r_{aR} + d) = 0,676kgm$

und

- $\Delta m = 0,001kg$
- $\Delta d = 0,0001m$
- $\Delta r_{aR} = 0,001m$

ergibt sich ein systematischer Fehler $\Delta\Theta_{Gewicht}$

$$\Delta\Theta_{Gewicht} = 0,0007kgm^2$$

Daraus resultiert ein Trägheitsmoment des Gewichts von

$$\Theta_{Gewicht} = \Theta_{Gewicht} \pm \Delta\Theta_{Gewicht} \pm \sigma_{\Theta_{Gewicht}} = (0,0575 \pm 0,0007 \pm 0)kgm^2$$

Θ_x

Wie bereits in der Vorbereitung erwähnt, gilt:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{\Theta_X \cdot \Theta_Y}}_{N_{ohne}}} \cdot \omega_r \quad \text{bzw. mit Gewichten:} \quad \omega_N = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{(\Theta_X + \Theta_{Gewicht}) \cdot \Theta_Y}}_{N_{mit}}} \cdot \omega_r$$

Zusammen ergeben die Gleichungen:

$$\Theta_x = \frac{\Theta_{Gewicht}}{\frac{N_{ohne}^2}{N_{mit}^2} - 1}$$

Damit ergibt sich

$$\Theta_x = 0,0272 \text{kgm}^2$$

Unter Berücksichtigung der Fehler von Θ_x folgt ein systematischer Fehler, der wieder mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet wird:

$$\Delta\Theta_x = \frac{\partial\Theta_x}{\partial\Theta_{Gewicht}} \cdot \Delta\Theta_{Gewicht}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_x}{\partial\Theta_{Gewicht}} = \frac{1}{\frac{N_{ohne}^2}{N_{mit}^2} - 1} = 0,518$

und

- $\Delta\Theta_{Gewicht} = 0,0007 \text{kgm}^2$

ergibt sich der systematische Fehler $\Delta\Theta_x$

$$\Delta\Theta_x = 0,0004 \text{kgm}^2$$

Außerdem tritt noch ein statistischer Fehler auf, der allerdings anders als beim systematischen Fehler nur von den beiden Steigungen der Ausgleichsgeraden der Nutationen abhängt.

$$\sigma\Theta_x = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial N_{ohne}}\right)^2 \cdot (\sigma N_{ohne})^2 + \left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial N_{mit}}\right)^2 \cdot (\sigma N_{mit})^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_x}{\partial N_{ohne}} = -\frac{\Theta_{Gewicht} \cdot 2 \cdot N_{ohne} \cdot N_{mit}^2}{N_{mit}^2 - N_{ohne}^2} = -0,0834 \text{kgm}^2$
- $\frac{\partial\Theta_x}{\partial N_{mit}} = \frac{\Theta_{Gewicht} \cdot 2 \cdot N_{mit} \cdot N_{ohne}^2}{N_{ohne}^2 - N_{mit}^2} = 0,1429 \text{kgm}^2$

und

- $\sigma N_{ohne} = 0,004$
- $\sigma N_{mit} = 0,019$

ergibt sich statistische Fehler $\sigma\Theta_x$

$$\sigma\Theta_x = 0,0027 \text{kgm}^2$$

Daraus resultiert ein Trägheitsmoment für Θ_x von

$$\Theta_{x,ges} = \Theta_x \pm \Delta\Theta_x \pm \sigma\Theta_x = (0,0272 \pm 0,0004 \pm 0,0027) \text{kgm}^2$$

6.2 Berechnung von Θ_z

Mithilfe der Messwerte für die Präzession aus Aufgabe 5 kann nun Θ_z berechnet werden:

$$f_P = \frac{r \cdot m \cdot g}{\underbrace{4\pi^2 \Theta_z}_{P_i}} \cdot \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \Theta_z = \frac{r \cdot m \cdot g}{4\pi^2 P_i}$$

Dies wird 3 Mal gemacht.

Zusätzlich ergibt sich wieder ein systematischer und ein statistischer Fehler.

Der systematische Fehler wird wieder mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt, da keine Korrelationen zwischen den systematischen Fehlern der Radien r_{iR} und r_s oder den Massen m_s und m_G , für die Berechnung mit Zusatzgewicht, oder der Steigung der Regressionsgeraden $P_{jeweiligerIndex}$ vorliegen.

Auf die Berechnung des systematischen Fehlers der Erdbeschleunigung wird im Folgenden verzichtet, da diese als hinreichend genau angesehen werden kann.

- $r_s = 175 \pm 1mm$ = Abstand zum Schwerpunkt des Stabes (entnommen aus Musterprotokoll Müller, Dottermusch)
- $r_{iR} = 109,1 \pm 0,3mm$ = Abstand zwischen dem Kreiselschwerpunkt und dem Innenrahmen
- $r_{aR} = 149 \pm 1mm$ = Abstand zwischen dem Kreiselschwerpunkt und dem Außenrahmen
- $m_s = 330 \pm 1g$ = Masse des Stabes
- $m_G = 375 \pm 1g$ = Masse des verschiebaren Gewichts

ohne Gewicht (nur Stab)

$$\Theta_z = \frac{(r_{iR} + r_s) \cdot m_s \cdot g}{4\pi^2 P_{ohne}} = 0,0108kgm^2$$

$$\Delta\Theta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_s}\right)^2 \cdot \Delta m_s^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_s}\right)^2 \cdot \Delta r_s^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_{iR}}\right)^2 \cdot \Delta r_{iR}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{ohne}}\right)^2 \cdot \Delta m_s^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_s} = \frac{(r_{iR} + r_s) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{ohne}} = 0,0327m^2$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_s} = \frac{m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{ohne}} = 0,0379kgm$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_{iR}} = \frac{m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{ohne}} = 0,0379kgm$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{ohne}} = -\frac{(r_{iR} + r_s) \cdot m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{ohne}^2} = 0,0050kgm^2$

und

- $\Delta m_s = 0,001kg$
- $\Delta r_s = 0,001m$
- $\Delta r_{iR} = 0,0003m$
- $\Delta P_{ohne} = 0,327$

ergibt sich ein systematischer Fehler des Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\Delta\Theta_z = 0,0016kgm^2$$

Für den statistischen Fehler wird ebenso die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet, jedoch tritt wieder nur ein statistischer Fehler für die Präzessionsfrequenz auf.

$$\sigma\Theta_z = \frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{ohne}} \cdot \sigma P_{ohne}$$

mit

- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial P_{ohne}} = -\frac{(r_{iR}+r_s) \cdot m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{ohne}^2} = 0,0050 \text{kgm}^2$

und

- $\sigma P_{ohne} = 0,029$

ergibt sich ein statischer Fehler es Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\sigma \Theta_z = 0,0001 \text{kgm}^2$$

Damit ergibt sich insgesamt ein Trägheitsmoment des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzession des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\Theta_{z,ges} = \Theta_z \pm \Delta \Theta_z \pm \sigma \Theta_z = (0,0108 \pm 0,0016 \pm 0,0001) \text{kgm}^2$$

mit Gewicht G im Abstand $a = 0m$

$$\Theta_z = \frac{(r_{iR} \cdot r_s) \cdot m_s \cdot g + (r_{iR} + 0) \cdot m_G \cdot g}{4\pi^2 P_{G0}} = 0.0098 \text{kgm}^2$$

$$\Delta \Theta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial m_s}\right)^2 \cdot \Delta m_s^2 + \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial m_G}\right)^2 \cdot \Delta m_G^2 + \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial r_s}\right)^2 \cdot \Delta r_s^2 + \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial a}\right)^2 \cdot \Delta a^2 + \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial r_{iR}}\right)^2 \cdot \Delta r_{iR}^2 + \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial P_{G0}}\right)^2 \cdot \Delta P_{G0}^2}$$

mit

- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial m_s} = \frac{(r_{iR}+r_s) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}} = 0,0206 \text{m}^2$
- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial m_G} = \frac{(r_{iR}+a) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}} = 0,0079 \text{m}^2$
- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial r_s} = \frac{m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}} = 0,0239 \text{kgm}$
- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial a} = \frac{m_G \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}} = 0,0272 \text{kgm}$
- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial r_{iR}} = \frac{(m_G+m_s) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}} = 0,0511 \text{kgm}$
- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial P_{G0}} = -\frac{((r_{iR}+r_s) \cdot m_s \cdot g) + ((r_{iR}+a) \cdot m_G \cdot g)}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}^2} = 0,0028 \text{kgm}^2$

und

- $\Delta m_s = 0.001 \text{kg}$
- $\Delta m_G = 0.001 \text{kg}$
- $\Delta r_s = 0.001 \text{m}$
- $\Delta r_{iR} = 0.0003 \text{m}$
- $\Delta a = 0m$,da das Zusatzgewicht direkt an den Anschlag geschraubt wurde
- $\Delta P_{G0} = 0,666$

ergibt sich ein systematischer Fehler des Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\Delta \Theta_z = 0,0019 \text{kgm}^2$$

Für den statistischen Fehler wird ebenso die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet jedoch tritt wieder nur ein statistischer Fehler für die Präzessionsfrequenz auf.

$$\sigma \Theta_z = \frac{\partial \Theta_z}{\partial P_{G0}} \cdot \sigma P_{G0}$$

mit

- $\frac{\partial \Theta_z}{\partial P_{G0}} = -\frac{((r_{iR}+r_s) \cdot m_s \cdot g) + ((r_{iR}+a) \cdot m_G \cdot g)}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G0}^2} = 0,0028 \text{kgm}^2$

und

- $\sigma P_{G0} = 0,053$

ergibt sich ein statischer Fehler des Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\sigma\Theta_z = 0,0001kgm^2$$

Damit ergibt sich insgesamt ein Trägheitsmoment des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes mit Zusatzgewicht beim 0. Strich von

$$\Theta_{z,ges} = \Theta_z \pm \Delta\Theta_z \pm \sigma\Theta_z = (0,0098 \pm 0,0019 \pm 0,0001)kgm^2$$

mit Gewicht **G** im Abstand $a = 0,1m$

$$\Theta_z = \frac{(r_{iR} \cdot r_s) \cdot m_s \cdot g + (r_{iR} + 0.1) \cdot m_G \cdot g}{4\pi^2 P_{G10}} = 0.0098 \text{ kgm}^2$$

$$\Delta\Theta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_s}\right)^2 \cdot \Delta m_s^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_G}\right)^2 \cdot \Delta m_G^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_s}\right)^2 \cdot \Delta r_s^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial a}\right)^2 \cdot \Delta a^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_{iR}}\right)^2 \cdot \Delta r_{iR}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{G10}}\right)^2 \cdot \Delta P_{G10}^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_s} = \frac{(r_{iR}+r_s) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}} = 0,0161m^2$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial m_G} = \frac{(r_{iR}+a) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}} = 0,0119m^2$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_s} = \frac{m_s \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}} = 0,0188kgm$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial a} = \frac{m_G \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}} = 0,0213kgm$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial r_{iR}} = \frac{(m_G+m_s) \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}} = 0,040kgm$
- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{G10}} = -\frac{((r_{iR}+r_s) \cdot m_s \cdot g) + ((r_{iR}+a) \cdot m_G \cdot g)}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}^2} = 0,0022kgm^2$

und

- $\Delta m_s = 0,001kg$
- $\Delta m_G = 0,001kg$
- $\Delta r_s = 0,001m$
- $\Delta a = 0,001m$
- $\Delta r_{iR} = 0.0003m$
- $\Delta P_{G10} = 0,874$

ergibt sich ein systematischer Fehler des Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzessions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\Delta\Theta_z = 0,0019kgm^2$$

Für den statistischen Fehler wird ebenso die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet jedoch tritt wieder nur ein statistischer Fehler für die Präzessionsfrequenz auf.

$$\sigma\Theta_z = \frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{G10}} \cdot \sigma P_{G10}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_z}{\partial P_{G10}} = -\frac{((r_{iR}+r_s) \cdot m_s \cdot g) + ((r_{iR}+a) \cdot m_G \cdot g)}{4 \cdot \pi^2 \cdot P_{G10}^2} = 0,0022kgm^2$

und

- $\sigma P_{G10} = 0,083$

ergibt sich ein statischer Fehler es Trägheitsmoments des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzisions des Stabes ohne Zusatzgewicht von

$$\sigma_{\Theta_z} = 0.0002 \text{kgm}^2$$

Damit ergibt sich insgesamt ein Trägheitsmoment des Kreisels um die z-Achse bei einer Messung der Präzisions des Stabes mit Zusatzgewicht beim 10. Strich von

$$\Theta_{z,ges} = \Theta_z \pm \Delta\Theta_z \pm \sigma_{\Theta_z} = (0,0098 \pm 0,0019 \pm 0.0002) \text{kgm}^2$$

Der Mittelwert lautet dann:

$$\Theta_z^{mittel} = (0.0101 \pm 0,0018 \pm 0,0002) \text{kgm}^2$$

6.3 Berechnung von Θ_y

Nun, da Θ_x und Θ_z bekannt sind, kann Θ_y leicht ausgerechnet werden:

$$f_n = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{\Theta_x \Theta_y}}_{N_{ohne}}} \cdot f \quad \Rightarrow \quad \Theta_y = \frac{\Theta_z^2}{N_{ohne}^2 \cdot \Theta_x}$$

Auch hier pflanzen sich die Fehler fort, aber wie auch in den vorherigen Berechnungen, besteht hier keine Korrelation zwischen den einzelnen Größen und deshalb werden die Fehler wieder mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Der systematische Fehler besteht nur aus den Fehler der beiden Trägheitsmomente:

$$\Delta\Theta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x}\right)^2 \cdot \Delta\Theta_x^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z}\right)^2 \cdot \Delta\Theta_z^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x} = -\frac{\Theta_z^2}{N_{ohne}^2 \cdot \Theta_x^2} = -0,5260$
- $\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z} = \frac{2 \cdot \Theta_z}{N_{ohne}^2 \cdot \Theta_x} = 2,8330$

und

- $\Delta\Theta_x = 0,0004 \text{kgm}^2$
- $\Delta\Theta_z = 0,0018 \text{kgm}^2$

Daraus resultiert ein systematischer Fehler von Θ_y

$$\Delta\Theta_y = 0,0051 \text{kgm}^2$$

Der statistische Fehler ergibt sich dann wieder aus den Einzelfehlern aller Messgrößen:

$$\sigma_{\Theta_y} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x}\right)^2 \cdot (\sigma_{\Theta_x})^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z}\right)^2 \cdot (\sigma_{\Theta_z})^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial N_{ohne}}\right)^2 \cdot (\sigma N_{ohne})^2}$$

mit

- $\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x} = -\frac{\Theta_z^2}{N_{ohne}^2 \cdot \Theta_x^2} = -0,5260$
- $\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z} = \frac{2 \cdot \Theta_z}{N_{ohne}^2 \cdot \Theta_x} = 2,8330$
- $\frac{\partial\Theta_y}{\partial N_{ohne}} = \frac{2 \cdot \Theta_z^2}{N_{ohne}^3 \cdot \Theta_x} = 0,0589$

und

- $\sigma_{\Theta_x} = 0.0027 \text{kgm}^2$
- $\sigma_{\Theta_z} = 0.0002 \text{kgm}^2$
- $\sigma N_{ohne} = 0,004$

Daraus resultiert ein systematischer Fehler von Θ_y

$$\Delta\Theta_y = 0,0015 \text{kgm}^2$$

Schluss endlich ergibt sich damit insgesamt ein Trägheitsmoment des Kreisels um die y-Achse von

$$\Theta_{y,ges} = \Theta_y \pm \Delta\Theta_y \pm \sigma_{\Theta_y} = (0,0144 \pm 0,0051 \pm 0.0015) \text{kgm}^2$$

6.4 Masse des Kreisels

Zuletzt soll noch aus den errechneten Trägheitsmomenten die Masse des Kreisels gefunden werden mit

- $d_{Rotor} = 135 \pm 0,1mm$

$$\Theta_z = \frac{1}{2}m \left(\frac{d_{Rotor}}{2} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{8 \cdot \Theta_z}{d_{Rotor}^2} = 4,433kg$$

Auch hier spielen systematischer und statistischer Fehler wieder eine Rolle.

Der systematische Fehler wird wieder aus beiden Messgrößen mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial \Theta_z} \right)^2 \cdot \Delta \Theta_z^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial d_{Rotor}} \right)^2 \cdot \Delta d_{Rotor}^2}$$

mit

- $\frac{\partial m}{\partial \Theta_z} = \frac{8}{d_{Rotor}^2} = 438,957 \frac{1}{m^2}$
- $\frac{\partial m}{\partial d_{Rotor}} = -\frac{16 \cdot \Theta_z}{d_{Rotor}^3} = -65,681 \frac{kg}{m}$

und

- $\Delta \Theta_z = 0,0018kgm^2$
- $\Delta d_{Rotor} = 0,0001m$

ergibt sich ein systematischer Fehler für die Masse des Rotors von

$$\Delta m = 0,790kg$$

Der statistische Fehler der Rotormasse wird lediglich vom statistischen Fehler des Trägheitsmoments um die z-Achse bestimmt:

$$\sigma_m = \frac{\partial m}{\partial \Theta_z} \cdot \sigma_{\Theta_z}$$

mit

$$\frac{\partial m}{\partial \Theta_z} = \frac{8}{d_{Rotor}^2} = 438,957 \frac{1}{m^2}$$

und

$$\sigma_{\Theta_z} = 0,0001kgm^2$$

ergibt sich ein systematischer Fehler für die Masse des Rotors von

$$\sigma_m = 0,044kg$$

Somit ergibt sich für die Rotormasse m

$$m_{ges} = m \pm \Delta m \pm \sigma_m = (4,433 \pm 0,790 \pm 0,044)kg$$

6.5 Fazit

Aus Symmetriegründen sollte gelten:

$$\Theta_x \approx \Theta_y > \Theta_z$$

Die letzte Relation stimmt, aber Θ_x und Θ_y weisen deutliche Diskrepanzen auf. Verglichen mit den Werten aus dem Musterprotokoll

$$\Theta_x=0.0274kgm^2, \quad \Theta_y=0.0278kgm^2, \quad \Theta_z=0.0143kgm^2$$

zeigt sich, dass Θ_x recht gut übereinstimmt, Θ_z um 29,4% abweicht, nach unserer Rechnung aber schon einen Fehler von bis zu 19,8% aufweist, und Θ_y sogar um 51,8% abweicht, wobei nach unserer Rechnung aber auch ein möglicher Fehler von 46,8% auftritt.

Wenn zur Berechnung der Θ_z - und anschließend daran die Θ_y -Wert die korrigierten Präzessionssteigungen $P_{jeweiligerIndex}$ verwendet worden wären, hätten sich weit bessere Übereinstimmungen mit den schlüssigen Daten aus dem Musterprotokoll ergeben.

Daraus schließen wir, dass die Messung von Θ_z ungenau war. Da Θ_z quadratisch in die Formel für Θ_y einging, wurde der Fehler noch größer. Der Fehler dürfte wirklich in der ungenauen Messung der Präzessionsfrequenz gelegen haben, da schon die kleine Korrektur von 0,5s schon so eine signifikante Veränderung mit sich bringt.

Um bessere Messergebnisse zu erhalten, wäre ein System mit einer Lichtschranke zur Messungen der Präzessionszeit sehr sinnvoll, um die menschliche Fehlerquelle zu vermeiden.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Der Kreisel auf dem Drehteller wurde von Hand beschleunigt. Nachdem der Drehteller in gleichmäßige Rotation versetzt wurde, pendelte sich der Kreiselkompass wie erwartet nach "Norden" aus. Dabei bestimmte die Drehrichtung, welche Spitze der Achse sich nach "Norden" oder "Süden" ausrichtete.