Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian — **1. Klausur (Blatt 8)** — 2. 12. 2000

---

1. Hyperbelfunktionen (9 Punkte)

Der Hyperbelkotangens ist wie folgt definiert:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{1}$$

wobei die Hyperbelfunktionen durch $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ gegeben sind. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definitionen:

(a) $\coth(-x) = -\coth x$ (2 Punkte)

(b) $\coth^2 x - 1 = 1/\sinh^2 x$ (2 Punkte)

(c) $\frac{d}{dx} \coth x = -1/\sinh^2 x$ (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie durch Integration:

$$\int dx\, \sqrt{ae^x + 1} = 2\left[\sqrt{ae^x + 1} - \operatorname{Arcoth}(\sqrt{ae^x + 1})\right] \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 0), \tag{2}$$

wobei Arcoth die Umkehrfunktion des coth ist. (3 Punkte)

Hinweis: Substitution, z.B. zunächst $\sqrt{ae^x + 1} = u$ und dann $u = \coth y$.

2. Bahnkurve (13 Punkte)

Eine Bahnkurve ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t} \cos \omega t \\ e^{\omega t} \sin \omega t \\ ct \end{pmatrix} \qquad (c, \omega \in \mathbb{R},\ \omega > 0). \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizzieren Sie die Bahnkurve für den Spezialfall $c = 0$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie für den Spezialfall $c = 0$, daß der Winkel α zwischen $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ nicht von t abhängt. (3 Punkte)

Hinweis: $\cos \alpha = \dfrac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|}$.

(d) Berechnen Sie für den Spezialfall $c = 0$ die Bogenlänge der Kurve $L(t_0, t_1)$ zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi/\omega$. (2 Punkte)

(e) Berechnen Sie für $c = \omega$ die Bogenlänge der Kurve $L(t_0, t_1)$ zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi/\omega$. (3 Punkte)

Hinweis: Das Integral läßt sich durch eine einfache Substitution auf die Form (2) bringen.

3. Drehmatrix (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die folgende Matrix D ist eine Drehmatrix: (3 Punkte)

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b) Was ist die Drehachse (ohne Rechnung)? (1 Punkt)

4. Bezugssysteme (8 Punkte)

Eine Bahnkurve lautet im Bezugssystem A:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Geben Sie die Bahnkurve in den folgenden Bezugssystemen an:

(a) B: Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = b\mathbf{e}_2$ bewegt (für $t = t_0$ sollen die Koordinaten von A und B zusammenfallen); (2 Punkte)

(b) C: Mit konstanter Beschleunigung $\mathbf{a} = 2c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$ bewegt (für $t = 0$ sollen die Koordinaten von A und C zusammenfallen und die Relativgeschwindigkeit verschwinden); (2 Punkte)

(c) D: Mit der Matrix D aus Gl. (4) gegenüber A verdreht (d.h., die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ in A lauten $D^{-1}\mathbf{v}$ in D). (3 Punkte)

(d) Welche der Bezugssysteme B, C und D sind Inertialsysteme, wenn A ein Inertialsystem ist? (1 Punkt)

5. Taylorreihen (6 Punkte)

Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = x_0$ bis zur Ordnung $(x - x_0)^2$ (einschließlich) für die folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \sin(x^2), \qquad x_0 = 0$ (3 Punkte)

(b) $f(x) = \ln x, \qquad x_0 = 1$ (3 Punkte)

Lösungsvorschläge

1. Hyperbelfunktionen (9 Punkte)

(a) (2 Punkte)

$$\coth(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}} = -\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = -\coth x$$

(b) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}\coth^2 x - 1 &= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2} = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x-e^{-x})^2}\\ &= \frac{4}{(e^x-e^{-x})^2} = \frac{1}{\sinh^2 x}\end{aligned}$$

(c) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\coth x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right) = \frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}\\ &= -\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2} = -\frac{1}{\sinh^2 x}\end{aligned}$$

(d) (3 Punkte)

$$\int dx\,\sqrt{ae^x+1} = \qquad\Big|\quad u=\sqrt{ae^x+1} \;\to\; ae^x = u^2-1$$

$$= \int \frac{2u\,du}{u^2-1}u \qquad du = \frac{ae^x\,dx}{2\sqrt{ae^x+1}} \;\to\; dx = \frac{2u\,du}{u^2-1}$$

$$= 2\int du\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right) \qquad\Big|\quad u=\coth y \;\to\; y = \operatorname{Arcoth} u$$

$$= 2\left(u-\int dy\right) \qquad du = -\frac{dy}{\sinh^2 y} \;\to\; du = -(u^2-1)dy$$

$$= 2\,(u-\operatorname{Arcoth} u)$$

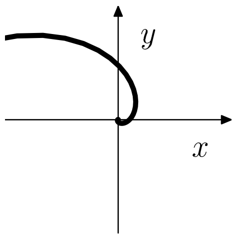
$$= 2\left(\sqrt{ae^x+1}-\operatorname{Arcoth}(\sqrt{ae^x+1})\right)$$

2. <u>Bahnkurve</u> (13 Punkte)

(a) (3 Punkte)

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \omega e^{\omega t}(\cos\omega t - \sin\omega t) \\ \omega e^{\omega t}(\sin\omega t + \cos\omega t) \\ c \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} -2\omega^2 e^{\omega t}\sin\omega t \\ 2\omega^2 e^{\omega t}\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2 Punkte)



(c) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t)| &= \sqrt{e^{2\omega t}(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = e^{\omega t} \\ |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{2\omega^2 e^{2\omega t}} = \sqrt{2}\,\omega e^{\omega t} \\ \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t) &= \omega e^{2\omega t} \\ \rightarrow\ \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\text{d.h. } \alpha = \pi/4 = 45^\circ) \end{aligned}$$

(d) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi/\omega} dt\,|\mathbf{v}(t)| = \int_0^{2\pi/\omega} dt\,\sqrt{2}\,\omega e^{\omega t} \\ &= \sqrt{2}\,\omega\left[\frac{1}{\omega}e^{\omega t}\right]_{t=0}^{t=2\pi/\omega} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \end{aligned}$$

(e) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi/\omega} dt\,|\mathbf{v}(t)| = \int_0^{2\pi/\omega} dt\,\sqrt{2\omega^2 e^{2\omega t} + \omega^2} \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{dx}{2\omega}\sqrt{2\omega^2 e^x + \omega^2} \qquad \text{wobei} \quad 2\omega t = x \rightarrow dt = \frac{dx}{2\omega} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} dx\,\sqrt{ae^x + 1} \qquad \text{mit } a = 2 \\ &= \left[\sqrt{2e^x + 1} - \operatorname{Arcoth}(\sqrt{2e^x + 1})\right]_{x=0}^{x=4\pi} \\ &= \sqrt{2e^{4\pi} + 1} - \sqrt{3} - \operatorname{Arcoth}(\sqrt{2e^{4\pi} + 1}) + \operatorname{Arcoth}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Bem.: Numerisch unterscheiden sich die beiden Bogenlängen nur minimal: 755.885 für $c = 0$ und 756.225 für $c = \omega$.

3. Drehmatrix (4 Punkte)

(a) (3 Punkte)

$$DD^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det D = \frac{1}{\sqrt{2}^3}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 1$$

(b) Drehachse ist die y-Achse. (1 Punkt)

4. Bezugssysteme (8 Punkte)

(a) $\mathbf{r}_{\mathsf{B}}(t) = (-ct^2,\ bt_0,\ ct^2)$ (2 Punkte)

(b) $\mathbf{r}_{\mathsf{C}}(t) = (-2ct^2,\ bt,\ 0)$ (2 Punkte)

(c) $D^{-1} = D^t$, also $\mathbf{r}_{\mathsf{D}}(t) = D^t\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\,ct^2,\ bt,\ 0)$. (3 Punkte)

(d) B und D sind Inertialsysteme, C nicht (beschleunigt gegenüber A). (1 Punkt)

5. Taylorreihen (6 Punkte)

(a) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 2x\cos(x^2) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) & f''(0) &= 2 \\ \to\ f(x) &= x^2 \pm \cdots \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= 1/x & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -1/x^2 & f''(1) &= -1 \\ \to\ f(x) &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \pm \cdots \end{aligned}$$