Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

1. Klausur zur Theoretischen Physik A WS 02/03

Prof. P. Wölfle

Dr. M. Greiter

17.12.02

Arbeitszeit 90 min

---

1. Bahnkurve

(6 Punkte)

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \sinh at \\ \cosh at \\ at \end{pmatrix}$$

wobei a ein reeller Parameter ist, der nicht positiv sein muss. Bestimmen Sie

(a) die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$

(b) die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$

(c) die Bogenlänge $L(t)$ als Funktion der Zeit t, gemessen ab $t = 0$.

2. Erzwungene Schwingungen

(12 Punkte)

Geben Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{1}$$

für die folgenden Störungen $f(t)$ an:

(a) $f(t) = 0$

(b) $f(t) = \sin(\omega t)$, wobei $\omega \neq \omega_0$ oder $\gamma \neq 0$.

Im weiteren sei $\gamma = 0$:

(c) $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

(d) $f(t) = \theta(t)$

(e) $f(t) = \delta(t)$

Hinweis: Die Greensche Funktion des ungedämpften Oszillators ((1) mit $\gamma = 0$) ist gegeben durch:

$$G(t) = \theta(t)\,\frac{1}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t) \tag{2}$$

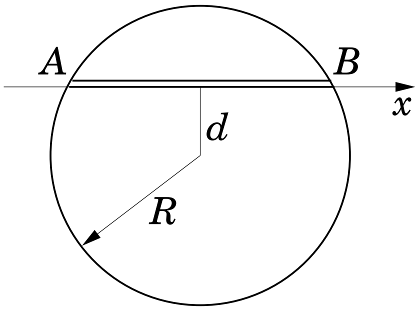
—bitte wenden—

3. Tunnel durch die Erde (6 Punkte)

Unter der Annahme, dass die Massendichte der Erde im Inneren konstant ist, ergibt sich die Gravitationsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Entfernung zum Erdmittelpunkt r innerhalb der Erde zu

$$g(r) = g_0 \, \frac{r}{R},$$

wobei R der Erdradius und g_0 die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche ist. Eine Masse m kann sich reibungsfrei in einem Tunnel durch das Erdinnere bewegen (siehe Skizze).



(a) Stellen sie die Bewegungsgleichung für die Masse auf.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung an

(c) Nehmen Sie an, die Masse wird zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt A losgelassen. Wie lange braucht sie, um den Punkt B zu erreichen?

Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

Prof. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

Musterlösung
1. Klausur

---

1. Bahnkurve (6 Punkte)

(a) $\boxed{1}$

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} a\cosh at \\ a\sinh at \\ a \end{pmatrix}$$

(b) $\boxed{1}$

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} a^2\sinh at \\ a^2\cosh at \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\boxed{4}$

$$L(t) = \int_0^t dt'\,|\boldsymbol{v}(t')| = \int_0^t dt\,\sqrt{a^2\cosh^2 at' + a^2\sinh^2 at' + a^2}$$

Mit $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$:

$$L(t) = \sqrt{2}\,|a|\int_0^t dt'\,\cosh at' = \sqrt{2}\,|a|\,\frac{\sinh at}{a} = \sqrt{2}\,\sinh\left(|a|t\right)$$

(Für $L(t) = \sqrt{2}\,\sinh\left(at\right)$ gibt es 3 der 4 Punkte.)

2. Erzwungene Schwingungen (12 Punkte)

Angabe einer partikulären Lösung:

(a) $x(t) = 0$ $\boxed{1}$

(Den Punkt gibt es auch bei Angabe der allgemeinen Lösung.)

(b) Ansatz $x = X_0 e^{i\omega t}$ für $\boxed{4}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \sin(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(c) Ansatz $x = at\cos(\omega_0 t)$: $\boxed{2}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2a\omega\sin\omega_0 t - at\omega_0^2\sin\omega_0 t + at\omega_0^2\sin\omega_0 t \stackrel{!}{=} a\sin\omega_0 t$$

also

$$a = -\frac{1}{2\omega_0}$$

(d) Allgemein: $\boxed{4}$

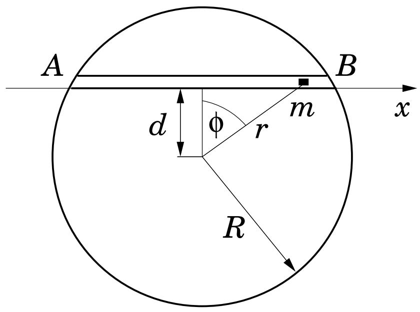
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

Mit $f(t) = \theta(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\theta(t-t')\,\frac{1}{\omega_0}\,\sin\omega_0(t-t')\,\theta(t') = \theta(t)\int_0^t dt'\,\frac{1}{\omega_0}\,\sin\omega_0(t-t') \\ &= \theta(t)\,\frac{1}{\omega_0^2}\,\cos\omega_0(t-t')\Big|_0^t = \theta(t)\,\frac{1}{\omega_0^2}\,(1-\cos\omega_0 t) \end{aligned}$$

(e) $x(t) = G(t)$ $\boxed{1}$

3. Tunnel durch die Erde (6 Punkte)



(a) Gravitationsbeschleunigung auf m in x Richtung: $\boxed{4}$

$$g_x = -g_0 \frac{r}{R} \sin\phi = -g_0 \frac{x}{R} \qquad \text{da } x = r\sin\phi$$

Bewegungsgleichung:

$$-m\ddot{x} - mg_0 \frac{x}{R} = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{mit } \omega^2 = \frac{g_0}{R}$$

(b) Allgemeine Lösung: $\boxed{1}$

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

(c) Dauer einer halben Vollschwingung: $\boxed{1}$

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$$