Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

# 2. Klausur zur Theoretischen Physik A WS 02/03

Prof. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

**11.02.03**
**Arbeitszeit 120 min**

---

## 1. Kraftfeld (5 Punkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie dass $\boldsymbol{F}$ konservativ ist.

(b) Das zugehörige Potential $V(\boldsymbol{r})$ sei im Unendlichen nominiert: $V(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$. Berechnen Sie $V(\boldsymbol{r})$ durch Integration des Kraftfeldes entlang eines geeigneten Weges.

(c) Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich in diesem Kraftfeld. Welche Komponenten des Drehimpulses bezüglich des Ursprungs sind erhalten? Welche Symmetrien sind für die Erhaltung verantwortlich?

## 2. Erzwungene Schwingungen (8 Punkte)

Geben Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (\text{wobei } \gamma > 0) \tag{2}$$

für die folgenden Störungen $f(t)$ an:

(a) $f(t) = \cos(\omega t)$.

(b) $f(t) = \theta(t)$

Hinweise:

(1) Die Greensche Funktion des gedämpften Oszillators (2) ist gegeben durch:

$$G(t) = \theta(t)\,\frac{1}{\Omega}\,\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin(\Omega t) \quad \text{wobei } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{3}$$

(2) Integral:

$$\int dx\, e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

—bitte wenden—

**3. Lenzscher Vektor** (6 Punkte)

Gegeben ist ein Planet im Gravitationsfeld mit Newtonscher Bewegungsgleichung

$$-m\ddot{\boldsymbol{r}} + F(r)\,\boldsymbol{e_r} = 0, \quad \text{wobei } F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad \boldsymbol{e_r} = \boldsymbol{r}/r. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Lenzsche Vektor

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv -\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{L}}{r^2 F(r)} - \boldsymbol{e_r}$$

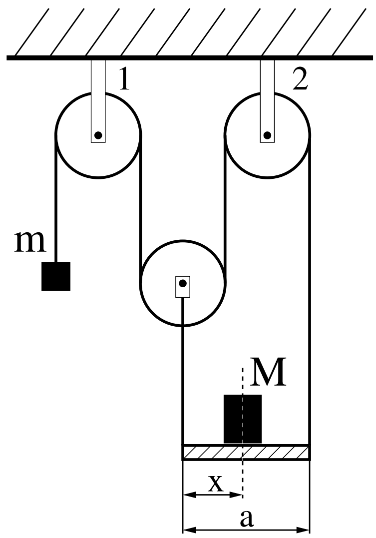
eine Erhaltungsgröße ist.

Hinweis: Bei der Berechnung von $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ können Sie die Bewegungsgleichung (4) und die Erhaltung des Drehimpulses $\mathbf{L}$ benutzen.

(b) In welche Richtung zeigt $\boldsymbol{\epsilon}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**4. Flaschenzug** (5 Punkte)

Zwei Gewichte der Massen $m$ und $M$ hängen in skizzierter Anordnung an einem Flaschenzug mit 3 Umlaufrollen. Vernachlässigen Sie die Massen des Seils, der Rollen, der Aufhängungen und der Querverbindung.




Nehmen Sie an, das Verhältnis der Abstände $x/a$ sei so bestimmt, dass die Querverbindung nicht kippt und $M$ nicht von der Querverbindung rutscht. Die Rolle 1 sei zunächst festgehalten, kann sich aber vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ an reibungsfrei drehen.

(a) Mit welcher Beschleunigung bewegt sich $m$ zum Zeitpunkt $t$ nach unten (oben)?

(b) Wie groß sind nun die Kräfte auf die Verankerungspunkte der Rollen 1 und 2 ?

(c) Wie groß muss das Verhältnis der Abstände $x/a$ sein, damit obige Bedingung gilt (d.h. die Querverbindung nicht kippt)?

UNIVERSITÄT KARLSRUHE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

**Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03**

PROF. P. WÖLFLE

DR. M. GREITER

**Musterlösung**
**2. Klausur**

---

## 1. Kraftfeld (5 Punkte)

(a) $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= \left(\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}(-y) - \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}(-x)\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ konservativ.

(b) Wegintegration von $\infty \to (x,y)$ entlang $\boxed{3}$

$$\boldsymbol{s} = t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{s}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{ds} = dt\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned}V(x,y) &= -\int_\infty^{(x,y)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})\cdot \boldsymbol{ds} = -\int_\infty^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}(t))\cdot \dot{\boldsymbol{s}}(t)dt \\ &= -\int_\infty^1 \frac{1}{\left(\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}\right)^3}\begin{pmatrix} -xt \\ -yt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\int_\infty^1 \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

(c) $\boldsymbol{L}_z$ bleibt erhalten. $\boxed{1}$
Verantwortliche Symmetrie: Rotationssymmetrie um die $z$ Achse.

**2. Erzwungene Schwingungen** (8 Punkte)

(a) Ansatz $x = X_0 e^{i\omega t}$ für $\boxed{4}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(b) Allgemein: $\boxed{4}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

Mit $f(t) = \theta(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \theta(t-t')\, \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma(t-t')}{2}\right) \sin(\Omega(t-t'))\, \theta(t') \\
&= \theta(t)\, \frac{1}{\Omega} \int_0^t dt' \exp\left(-\frac{\gamma(t-t')}{2}\right) \sin\Omega(t-t') \\
&= \theta(t)\, \frac{1}{\Omega} \int_{-t}^0 dt'' \;\exp\left(\frac{\gamma t''}{2}\right) (-\sin\Omega t'')
\end{aligned}$$

Mit

$$\int e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
x(t) &= \theta(t)\, \frac{1}{\Omega}\, \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \Omega^2} \exp\left(\frac{\gamma t''}{2}\right) \left(-\frac{\gamma}{2}\sin\Omega t'' + \Omega\cos\Omega t''\right)\Bigg|_{-t}^{0} \\
&= \theta(t)\, \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \Omega^2} \left(1 - \frac{1}{\Omega}\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left(\frac{\gamma}{2}\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t\right)\right)
\end{aligned}$$

**3. Lenzscher Vektor** (6 Punkte)

(a) Mit $F(r) = -\frac{k}{r^2}$: $\boxed{4}$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{k} - \boldsymbol{e_r}$$

Abgeleitet

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{L}}}{k} - \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

Mit

$$\mathbf{r} = r\,\boldsymbol{e_r}$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\boldsymbol{e_r} + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi}$$

ergibt sich der Drehimpuls zu

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r\,\boldsymbol{e_r} \times r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi}) = mr^2\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_z}.$$

Mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{mr^2}\,\boldsymbol{e_r},$$

Drehimpulserhaltung

$$\dot{\boldsymbol{L}} = 0$$

und

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi}$$

ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{k}\left(-\frac{k}{mr^2}\,\boldsymbol{e_r} \times mr^2\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_z}\right) - \dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi} = 0$$

wobei $\boldsymbol{e_r} \times \boldsymbol{e_z} = -\boldsymbol{e_\phi}$ verwendet wurde.

(b) $\boldsymbol{\epsilon}$ zeigt in Richtung des Perihels. $\boxed{2}$

(Perihel = Punkt der Bahnkurve, an dem der Abstand zwischen Planet und Gravitationszentrum minimal wird.)

Begründung: am Perihel, $\dot{r} = 0$ und somit $\dot{\mathbf{r}} = r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi}$. Eingesetzt ergibt sich

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_\phi} \times mr^2\dot{\phi}\,\boldsymbol{e_z}}{k} - \boldsymbol{e_r} = \left(\frac{mr^3\dot{\phi}^2}{k} - 1\right)\boldsymbol{e_r}.$$

Der Lenzsche Vektor zeigt somit am Perihel in Richtung von $\boldsymbol{e_r}$.

**4. Flaschenzug** (5 Punkte)

(a) Annahme: $m$ bewege sich mit Beschleunigung $a$ nach unten. $\boxed{2}$

Der Flaschenzug untersetzt die die Kraft der Masse $M$ 1:3 und $M$ bewegt sich nur mit Beschleunigung $a/3$ nach oben.

Kraft auf das Seil:

$$m(g-a) = F_{\text{Seil}} = \frac{1}{3}M\left(g + \frac{a}{3}\right)$$

Aufgelöst:

$$a = \frac{m - \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}}\,g$$

(b) Kraft auf Verankerungspunkte: $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} F = 2F_{\text{Seil}} = 2m(g-a) &= 2mg\left(1 - \frac{m - \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}}\right) \\ &= 2mg\frac{m + \frac{M}{9} - m + \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}} = 8g\,\frac{m\,\frac{M}{9}}{m + \frac{M}{9}} \end{aligned}$$

(c) $\boxed{1}$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$$