

## Nachklausur zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

07.05.03

DR. M. GREITER

Arbeitszeit 120 min

## 1. Kraftfeld

(5 Punkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld

$$\mathbf{F} = \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^5} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie dass  $\mathbf{F}$  konservativ ist.
- (b) Das zugehörige Potential  $V(\mathbf{r})$  sei im Unendlichen normiert:  $V(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0$ . Berechnen Sie  $V(\mathbf{r})$  durch Integration des Kraftfeldes entlang eines geeigneten Weges.
- (c) Ein Teilchen der Masse  $m$  bewegt sich in diesem Kraftfeld. Welche Komponenten des Drehimpulses bezüglich des Ursprungs sind erhalten? Welche Symmetrien sind für die Erhaltung verantwortlich?

## 2. Erzwungene Schwingungen

(6 Punkte)

Geben Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (\text{wobei } \gamma > 0) \quad (2)$$

für die folgenden Störungen  $f(t)$  an:

- (a)  $f(t) = \sin(2\omega_0 t)$ .
- (b)  $f(t) = \delta(t) + c\delta(t - \frac{T}{2})$  wobei  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ,  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$ .

Bestimmen Sie  $c$  so dass  $x(t) = 0$  für  $t > \frac{T}{2}$  falls  $x(t) = 0$  für  $t < 0$ . Skizzieren Sie  $x(t)$  für diesen Fall.

Hinweis:

Die Greensche Funktion des gedämpften Oszillators (2) ist gegeben durch:

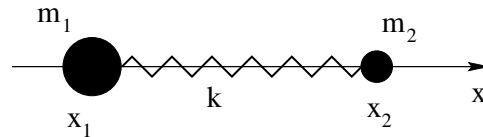
$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin(\Omega t) \quad \text{wobei } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3)$$

—bitte wenden—

### 3. Zweikörperproblem

(7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die durch eine Feder mit Federkonstante  $k$  verbunden sind. In der Ruhelage hat die Feder die Länge  $a$ .



- Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  der beiden Massen an.
- Transformieren Sie diese Gleichungen auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.
- Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen für Schwerpunkts- und Relativkoordinaten an.
- Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien:

$$x_1(0) = -a, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

Berechnen Sie  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ .

### 4. Keplerproblem und Lenzscher Vektor

(6 Punkte)

Gegeben ist ein Planet im Gravitationsfeld mit Newtonscher Bewegungsgleichung

$$-m\ddot{\mathbf{r}} + F(r) \mathbf{e}_r = 0, \quad \text{wobei } F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r. \quad (4)$$

In den Übungen wurde gezeigt, dass der Lenzsche Vektor

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{r^2 F(r)} - \mathbf{e}_r$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Wählen Sie ein Koordinatensystem, so dass der Drehimpulsvektor in Richtung der  $z$ -Achse und der Lenzsche Vektor in Richtung der  $x$ -Achse zeigt. Stellen Sie die Gleichungen für die Erhaltung von Drehimpuls  $\mathbf{L} = (0, 0, L)$  und Lenz-Vektor  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon, 0, 0)$  in Polarkoordinaten auf, d.h. ausgedrückt durch  $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$ . Bestimmen Sie damit die Bahnkurve  $r(\phi)$  für einen Planeten im Gravitationsfeld.

## Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE  
DR. M. GREITERMusterlösung  
Nachklausur

## 1. Kraftfeld

(5 Punkte)

(a)

1

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \right) \mathbf{e}_y \\ &= \left( \left( -\frac{5}{2} \right) \frac{4x}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^7} (-z) - \left( -\frac{5}{2} \right) \frac{2z}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^7} (-2x) \right) \mathbf{e}_y \\ &= 0\end{aligned}$$

 $\Rightarrow \mathbf{F}$  konservativ.(b) Wegintegration von  $\infty \rightarrow (x, z)$  entlang

3

$$\mathbf{s} = t \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad d\mathbf{s} = dt \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned}V(x, y) &= - \int_{\infty}^{(x,0,z)} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\infty}^1 \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t) dt \\ &= - \int_{\infty}^1 \frac{1}{(\sqrt{(2tx)^2 + (tz)^2})^5} \begin{pmatrix} -2xt \\ 0 \\ -zt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^3} \int_{\infty}^1 \frac{1}{t^4} dt \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^3} \left[ -\frac{1}{3} t^{-3} \right]_{\infty}^1 = -\frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt{2x^2 + z^2})^3}\end{aligned}$$

(c) Keine der Drehimpulskomponenten bleibt erhalten, da das Potential keine Rotationssymmetrie besitzt.

1

## 2. Erzwungene Schwingungen

(6 Punkte)

(a) Ansatz  $x = X_0 e^{i\omega t}$  für

3

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sin(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan \alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Für den Spezialfall  $\omega = 2\omega_0$  ergibt sich

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{(3\omega_0)^2 + (2\gamma)^2}}, \quad \tan \alpha = \frac{2\gamma}{3\omega_0}$$

(b) Allgemein:

3

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

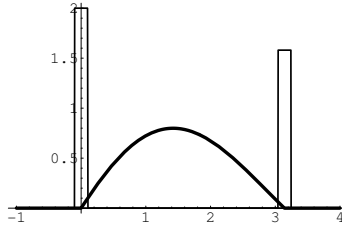
Mit  $f(t) = \delta(t) + c\delta(t - \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') (\delta(t') + c\delta(t' - \frac{T}{2})) \\ &= G(t) + cG(t - \frac{T}{2}) \\ &= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin \Omega t + c\theta\left(t - \frac{T}{2}\right) \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma(t - \frac{T}{2})}{2}\right) \sin \Omega\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\Omega} \left( \theta(t) - c\theta\left(t - \frac{T}{2}\right) \exp\left(\frac{\gamma T}{4}\right) \right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin \Omega t \end{aligned}$$

Trivialerweise  $x(t) = 0$  für  $t < 0$ .  $x(t) = 0$  für  $t > \frac{T}{2}$  falls

$$1 - c \exp\left(\frac{\gamma T}{4}\right) = 0,$$

also wenn  $c = \exp\left(-\frac{\gamma T}{4}\right)$ .



(Die Deltafunktionen müssen nicht angedeutet werden.)

### 3. Zweikörperproblem

(7 Punkte)

(a) Bewegungsgleichungen:

1

$$\begin{aligned} -m_1 \ddot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - a) &= 0 \\ -m_2 \ddot{x}_2 - k(x_2 - x_1 - a) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Schwerpunktskoordinate:

2

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Relativkoordinate:

$$x = x_2 - x_1 \quad (2)$$

Umgeformt:

$$x_1 = X - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x, \quad x_2 = X + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichungen:

$$-m_1 \ddot{X} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} + k(x - a) = 0 \quad (3)$$

$$-m_2 \ddot{X} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} - k(x - a) = 0 \quad (4)$$

Addition (3)+(4) ergibt:

$$(m_1 + m_2) \ddot{X} = 0 \quad \text{also} \quad \ddot{X} = 0.$$

Eingesetzt in (3):

$$m^* \ddot{x} + k(x - a) = 0 \quad \text{wobei} \quad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

(c) Schwerpunktskoordinate (freies Teilchen):

2

$$X = X_0 + Vt$$

Relativkoordinate (Harmonische Oszillatorschwingung um  $x = a$ ):

$$x = a + A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad \text{wobei} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m^*}}$$

$X_0, V, A, B$  sind freie Parameter.

(d) Anfangsbedingungen für Schwerpunktskoordinate: aus (1)

2

$$X(0) = \frac{m_1(-a)}{m_1 + m_2}, \quad \dot{X}(0) = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow X(t) = \frac{m_1(-a + v_0 t)}{m_1 + m_2}$$

Anfangsbedingungen für Relativkoordinate: aus (2)

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = -v_0 \Rightarrow x(t) = a - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Somit

$$x_1(t) = X - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x = -a + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$x_2(t) = X + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( v_0 t - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

#### 4. Keplerproblem und Lenzscher Vektor

(6 Punkte)

Lenzscher Vektor für  $F(r) = -k/r^2$ , ausgedrückt durch  $r(t)$  und  $\phi(t)$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{k} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \frac{1}{r} \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{k} \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu}{k} \begin{pmatrix} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ -r^2 \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist konstant gleich  $(\epsilon, 0, 0)$ . Zusammen mit der Drehimpulserhaltung ergibt das die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2 \dot{\phi} \\ \epsilon &= \frac{\mu}{k} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + \left( \frac{\mu}{k} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{\mu}{k} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \left( \frac{\mu}{k} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \sin \phi \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten in die beiden anderen Gleichungen liefert mit  $p = \frac{L^2}{\mu k}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{L}{k} \dot{r} \sin \phi + \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{L}{k} \dot{r} \cos \phi + \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \sin \phi \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $\cos \phi$  und die zweite mit  $\sin \phi$  und addiert man beide Zeilen, so erhält man

$$\epsilon \cos \phi = \frac{p}{r} - 1,$$

also

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$