1. Klausur zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Hinweis: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt zugelassen. Die Rückgabe der Klausur findet am 22. 12.04 von 15:00-16:00 im Raum 3.1 statt. Die Besprechung der Klausur findet am 07.01.2005 in den Tutorien statt.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Integrale:

Berechnen Sie mittels partieller Integration die Integrale

$$\int \mathrm{d}x\, xe^{-x}, \qquad \int \mathrm{d}\phi\, \cos^2(\phi)$$

und mittels Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{(x+1)(x-3)}.$$

(Logarithmen brauchen Sie nicht numerisch anzugeben.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Komplexe Zahlen:

Berechnen Sie (d.h. bringen Sie die Ausdrücke in die Form $a + ib$ mit reellen a und b)

$$i^4(i+2)^2 \qquad (3+i)(4-2i), \qquad e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad \frac{1+i}{1-i}\,.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Trennung der Variablen:

Die Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F \cdot t, \qquad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2}} \tag{1}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die konstante Lichtgeschwindigkeit ist.

a) Lösen Sie zunächst die Bewegungsgleichung nach $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ auf (nachdem Sie den Ausdruck für $M(t)$ in diese einsetzen). (1 Punkt)

b) Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ für $t \to \infty$ und für $t \to 0$ an, indem Sie im Ergebnis von a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten. (2 Punkte)

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie im Ergebnis von a) das Verfahren der Trennung der Variablen anwenden. Die Anfangsbedingung laute $x(t=0) = 0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretenden Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = \text{konst.} \cdot t^2$ weiter. (3 Punkte)

d) Skizzieren Sie $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und $x(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Harmonischer Oszillator:

a) Geben Sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

mit $\gamma < \omega_0$ (unterdämpfter Fall) mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. (4 Punkte)

b) Es sei nun eine treibende Kraft der Form $F = F_0 \cos(\omega t)$ vorhanden. Zeichnen Sie qualitativ die Amplitude der partikulären Lösung als Funktion der Frequenz ω der treibenden Kraft. (1 Punkt)

c) Geben Sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator im überdämpften Fall $\gamma > \omega_0$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 5 (7 Punkte)

LCR-Kreis mit δ-Puls:

Eine δ-artige Radiowelle werde zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einen LCR-Kreis mit Antenne eingestrahlt und induziere einen Spannungspuls $V(t) = V_0\delta(t)$. Die Gleichung für die Ladung des Kondensators lautet:

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + Q(t)/C = V_0\,\delta(t)\ . \tag{3}$$

Betrachten Sie zunächst den Fall $L = 0$:

a) Bestimmen Sie aus (3) die Fouriertransformierte $\tilde{Q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} Q(t)$ der Ladung. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $Q(t)$ durch Rücktransformation und skizzieren Sie das Ergebnis. (3 Punkte)

Hinweis: Für $x > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ix} = \theta(t)\, e^{-xt} \tag{4}$$

Betrachten Sie nun den Fall $L \neq 0$, mit schwacher Dämpfung $R < 2\sqrt{L/C}$.

c) Bestimmen Sie wieder $\tilde{Q}(\omega)$. (1 Punkt)

d) Skizzieren Sie $|\tilde{Q}(\omega)|$ für $R \ll 2\sqrt{L/C}$. Bei welcher Frequenz liegt das Maximum? (1 Punkt)

Lösungsvorschlag zur ersten Klausur Theoretische Physik A: Klassische Mechanik

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1 $\boxed{\text{3 Punkte}}$

a.)

Das Integral kann geschickt mit partieller Integration gelöst werden:

$$\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\exp(-x)}_{u'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{-\exp(-x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v}\Big| + \int \underbrace{\exp(-x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \,\mathrm{d}x = \boxed{-\exp(-x)\cdot(1+x)}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b.)

Auch hier ist partielle Integration sinnvoll:

$$\int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int \underbrace{\cos\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{v'} \,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\sin\varphi}_{v} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{u}\Big| + \int \underbrace{\sin\varphi}_{u'} \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{v} \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \int \left(1-\cos^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \varphi| - \int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Nun müssen wir nur noch das Integral auf der rechten Seite nach links bringen und durch zwei dividieren:

$$\int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot(\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\varphi + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Eine andere Möglichkeit, das Integral zu berechnen, ist, die Beziehung $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$ auszunutzen. Damit gilt nämlich:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\varphi)) \Rightarrow \int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(\varphi + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Es gibt unabhängig von der gewählten Rechnung einen Punkt.

c.)

Dieses Integral lösen wir durch Partialbruchzerlegung:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\left[\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot(\ln(1)-\ln(3)) = \boxed{-\frac{1}{4}\ln(3)}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Aufgabe 2 $\boxed{\text{4 Punkte}}$

- Ausdruck ①:

  $$\mathrm{i}^4\cdot(\mathrm{i}+2)^2 = (-1)^2\cdot(\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}+4) = -1+4\mathrm{i}+4 = \boxed{3+4\mathrm{i}}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

- Ausdruck ②:

  $$(3+\mathrm{i})\cdot(4-2\mathrm{i}) = 12-6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 = 12-2\mathrm{i}-2\cdot(-1) = \boxed{14-2\mathrm{i}}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

* Ausdruck ③:

  $$\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\mathrm{i}}$$ 1 Punkt

* Ausdruck ④:

  $$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}=\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1+1}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\boxed{\mathrm{i}}$$ 1 Punkt

Aufgabe 3 — 8 Punkte

a.)

Wir setzen die zeitabhängige Masse $M(t)$ in die Bewegungsgleichung $M(t)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F\cdot t$ ein und lösen nach $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=F\cdot t$$

Durch Quadrieren ergibt sich:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right)^2\right]=\left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2$$

$$\boxed{\dot{x}\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F\cdot t}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right)^2}}}$$ 1 Punkt

$\dot{x}$ muss positiv sein, da das Vorzeichen von $\dot{x}$ nach obiger Bewegungsgleichung dasselbe wie von $F\cdot t$ (mit $F>0$) ist.

b.)

* Fall ①: $t\mapsto\infty$:

  Man kann im Prinzip die 1 unter der Wurzel gegenüber dem quadratischen Term von t vernachlässigen:

  $$\dot{x}\approx\frac{F\cdot t}{m}\cdot\frac{1}{\left|\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right|}=c\cdot\frac{F}{|F|}=c\cdot\operatorname{sign}(F)=\boxed{c}$$ 1 Punkt

  Es ist $\operatorname{sign}(F)=1$, da $F>0$ ist.

* Fall ②: $t\mapsto 0$:

  Umgekehrt kann man hier den quadratischen Term von t gegenüber der 1 unter der Wurzel vernachlässigen:

  $$\dot{x}\approx\boxed{\frac{F\cdot t}{m}}$$ 1 Punkt

c.)

Wir wollen die Differentialgleichung aus Aufgabenteil a.) lösen. Dazu trennen wir die Veränderlichen x und t und integrieren auf beiden Seiten unter Beachtung der Anfangsbedingung $x(t=0)=0$:

$$\int\limits_{x(t=0)=0}^{x}\mathrm{d}x'=\int\limits_0^t\frac{F\cdot t'}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t'}{m\cdot c}\right)^2}}\,\mathrm{d}t'$$ 1 Punkt

$$x(t)=\frac{F}{m}\cdot\int\limits_0^t\frac{t'}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m\cdot c}\right)^2\cdot t'^2}}\,\mathrm{d}t'$$

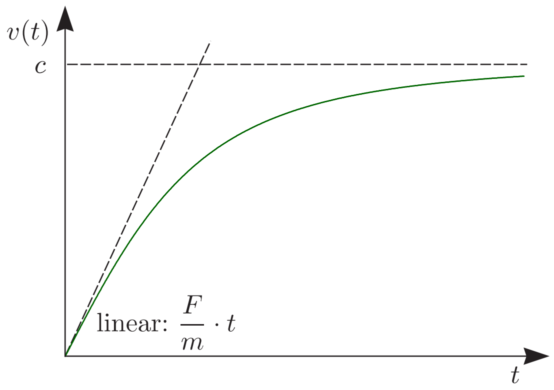
Wir verwenden die Substitution $\tau = t'^2$, $\mathrm{d}\tau = 2t'\,\mathrm{d}t'$:

$$x(t) = \frac{F}{2m} \cdot \int\limits_0^{t^2} \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m \cdot c}\right)^2 \cdot \tau}} = \frac{F}{2m} \cdot 2 \cdot \left(\frac{m \cdot c}{F}\right)^2 \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m \cdot c}\right)^2 \cdot t^2} - 1\right] =$$

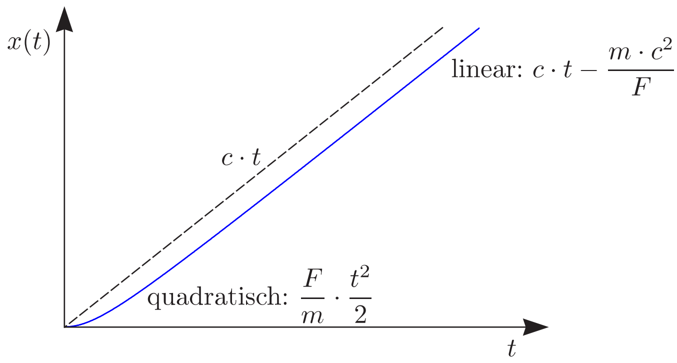
$$= \boxed{\frac{m \cdot c^2}{F} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m \cdot c}\right)^2} - 1\right]} = c \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{m \cdot c}{F}\right)^2 + t^2} - \frac{m \cdot c}{F}\right]$$

2 Punkte

d.)



1 Punkt



1 Punkt

Aufgabe 4 — 8 Punkte

a.)

Die allgemeine Lösung des unterdämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$x(t) = A \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — 1 Punkt

Aus den Bedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ erhalten wir:

$$x(t = 0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A \cdot \cos(\varphi) = 0$$

$$\dot{x}(t = 0) = -\gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \underbrace{A \cdot \cos(\varphi)}_{=0} - A \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} v_0$$

Hieraus folgt also:

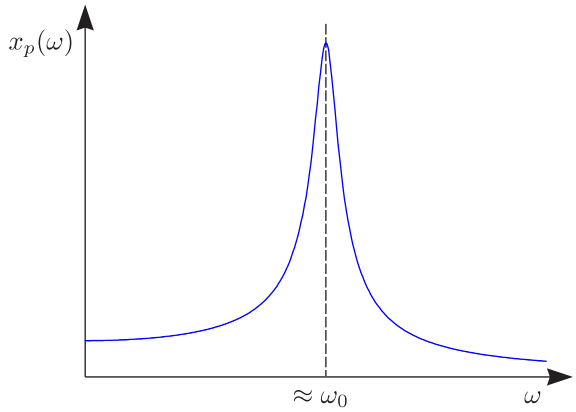
$\boxed{\cos(\varphi) = 0,\ \sin(\varphi) = -1}$ — 1 Punkt

$\boxed{A = \frac{v_0}{\Omega}}$ — 1 Punkt

Als Lösung erhalten wir:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \sin(\Omega \cdot t)}$$ 1 Punkt

b.)



1 Punkt

c.)

Im überdämpften Fall gilt folgende allgemeine Lösung:

$$x(t) = \exp(-\gamma \cdot t) \cdot [A \cdot \exp(\Omega' \cdot t) + B \cdot \exp(-\Omega' \cdot t)] \text{ mit } \Omega' = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$ 1 Punkt

Werten wir nun wieder die Anfangsbedingungen aus:

$$x(t=0) \overset{!}{=} 0 = A + B \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$\dot{x}(t=0) = -\gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot (A+B) + \Omega' \cdot (A - B) = 2 \cdot A \cdot \Omega' \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{2\Omega'}}$$ 1 Punkt

Als Lösung ergibt sich damit:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2\Omega'} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot [\exp(\Omega' \cdot t) - \exp(-\Omega' \cdot t)]}$$ 1 Punkt

Aufgabe 5 — 7 Punkte

a.)

Durch FOURIER-Transformation erhalten wir aus der Differentialgleichung für den LCR-Kreis folgende algebraische Gleichung:

$$\left(-L \cdot \omega^2 + \mathrm{i}\omega \cdot R + \frac{1}{C}\right) \widetilde{Q}(\omega) = V_0$$ 1 Punkt

$\widetilde{Q}(\omega)$ ist hierbei die FOURIER-Transformierte von $Q(t)$. Wir lösen nach $\widetilde{Q}(\omega)$ auf, wobei in diesem Falle $L = 0$ sei:

$$\boxed{\widetilde{Q}(\omega) \underset{L=0}{=} \frac{V_0 \cdot C}{1 + \mathrm{i}\omega RC}} = \frac{V_0}{\mathrm{i}R} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC}}$$ 1 Punkt

b.)

Durch Rücktransformation erhalten wir $Q(t)$:

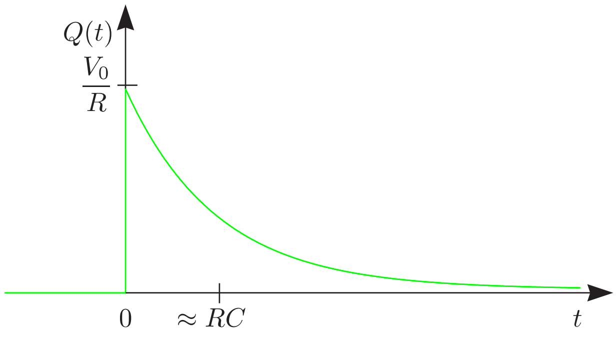
$$Q(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t) \cdot \widetilde{Q}(\omega) = \frac{V_0}{R} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC}}$$ 1 Punkt

Hieraus ergibt sich

$$\boxed{Q(t) = \frac{V_0}{R} \cdot \theta(t) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$ 1 Punkt

unter Verwendung von:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega - \mathrm{i}x} = \theta(t) \cdot \exp(-x \cdot t) \text{ mit } x > 0$$



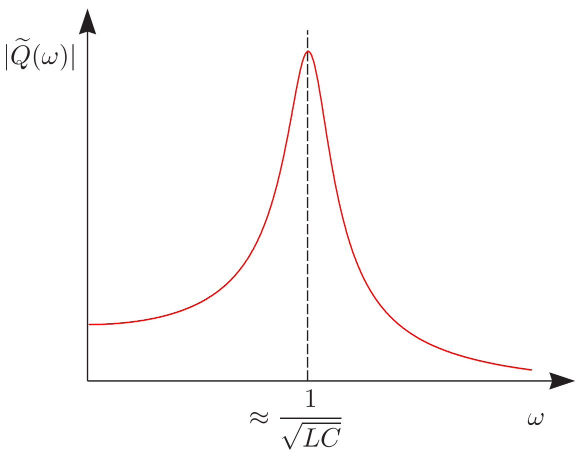
1 Punkt

c.)

Hier sei nun $L \neq 0$:

$$\widetilde{Q}(\omega) = \boxed{\frac{V_0}{-L \cdot \omega^2 + \mathrm{i}\omega \cdot R + \frac{1}{c}}} = \frac{V_0 \cdot C}{\mathrm{i}\omega \cdot RC + 1 - LC \cdot \omega^2} = \frac{V_0}{\mathrm{i}R} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC} + \frac{\mathrm{i} \cdot L\omega^2}{R}}$$ 1 Punkt

d.)



1 Punkt

<u>Begründung (nicht erforderlich):</u>

Es ist $R \ll 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ (oder auch $RC \ll 2\sqrt{LC}$).

$$\widetilde{Q}(\omega) = \frac{V_0 C}{-(\sqrt{LC} \cdot \omega)^2 + \mathrm{i} \cdot (RC \cdot \omega) + 1}$$

Das Maximum liegt bei $1 = \sqrt{LC} \cdot \omega$ für $RC \ll \sqrt{LC}$.