2. Klausur zur Vorlesung **Theoretische Physik A**
Universität Karlsruhe **WS 2004/05**

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Dauer: 2 Stunden
Gesamtpunktzahl: 30 Punkte + 5 Zusatzpunkte
Hinweise: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. **Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.** Geben Sie bitte auf dem ersten Blatt Ihre Übungsgruppe an. Als Hilfsmittel sind zwei handbeschriebene A4-Blätter zugelassen. Die Rückgabe sowie die Besprechung der Klausur findet in den Tutorien am Freitag, den 18.02.05 statt.

Aufgabe 1 Kräfte und Erhaltungssätze: (9 Punkte)

a) Berechnen Sie rot$\vec{F}$ für die Kraft $\vec{F}(\vec{x}) = \hat{e}_x yz + \hat{e}_y xz + \hat{e}_z xy$. Ist $\vec{F}$ konservativ? Wenn ja, bestimmen Sie das entsprechende Potential $U(\vec{x})$. (3 Punkte)

b) Gegeben Sei eine Kraft $\vec{F} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y$. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Wegintegral $I = \int \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ für einen kreisförmigen Weg mit Radius 1 um den Ursprung in der x-y-Ebene. Berechnen Sie das Flächenintegral $\int_{A_0} \mathrm{d}A\, \hat{e}_z \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F})$ über die Fläche des Einheitskreises in der x-y-Ebene. (3 Punkte)

c) Betrachten Sie zwei Teilchen mit gleicher Masse m. Teilchen 1 stößt mit der Geschwindigkeit v elastisch und zentral auf das zweite Teilchen, welches ruht. Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen nach dem Stoß? (1 Punkt)

d) Zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 und Geschwindigkeiten v_1 und v_2 stoßen unter einem rechten Winkel vollständig inelastisch aufeinander. Finden Sie die Geschwindigkeit des resultierenden Teilchens. (2 Punkte)

Aufgabe 2 Getriebener harmonischer Oszillator: (4 Punkte)

Ein harmonischer Oszillator (Ortskoordinate $x(t)$, Masse m, Federkonstante $k = m\omega_0^2$) mit Dämpfung γ werde durch eine Kraft $F(t) = m\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)$ getrieben.

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{x}(\omega)$, und skizzieren Sie die Größe $|\tilde{x}(\omega)/\tilde{f}(\omega)|$. (2 Punkte)

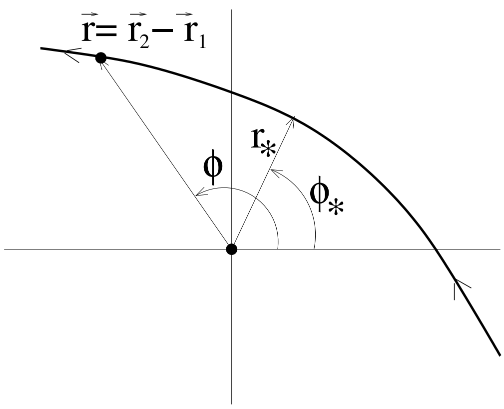
b) Für den Fall $F(t) = mf\cos(\omega_1 t)$, bestimmen Sie $\tilde{f}(\omega)$ und finden Sie **durch Fourierrücktransformation** von $\tilde{x}(\omega)$ eine partikuläre Lösung $x(t)$. (2 Punkte)

Aufgabe 3 Zentralkraft: (12 Punkte)

Zwei Teilchen, die eine Kraft

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -a(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^4$$

aufeinander ausüben, fliegen aneinander vorbei (siehe Skizze für die Bahn, die der Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ beschreibt). Energie und Drehimpuls der Relativbewegung seien E und L.



a) Zeigen Sie, dass das effektive Potential für die Relativbewegung die Form $U_{eff}(r) = c/r^2$ hat, und drücken Sie c durch a, die reduzierte Masse μ und den Drehimpuls $L = \mu r^2\dot{\phi}$ aus. (Hinweis: in Zylinderkoordinaten gilt $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\phi}\hat{e}_\phi$.) (2 Punkte)

Betrachten Sie in (3b) bis (3d) nur den Fall $c > 0$, $E > 0$.

b) Skizzieren Sie $U_{eff}(r)$ und tragen Sie E ein. Erklären Sie anhand Ihrer Skizze, warum die Teilchen nicht aufeinanderstoßen, sondern aneinander vorbeifliegen. Zeichnen Sie den Abstand kleinster Annäherung, r_*, auf Ihrer Skizze ein. Drücken Sie r_* als Funktion von E und c aus. (4 Punkte)

c) Nutzen Sie Energieerhaltung, um eine Gleichung für $\dot{r}$ herzuleiten. Integrieren Sie diese (nach Separation der Variablen), und bestimmen Sie r als Funktion von $t - t_*$. Hinweis: $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2}\Big|_a^b$ (3 Punkte)

d) Nutzen Sie Drehimpulserhaltung um eine Gleichung für $\frac{dr}{d\phi}$ herzuleiten. Integrieren Sie diese (nach Separation der Variablen), und finden Sie r als Funktion von $\phi - \phi_*$, wobei ϕ_* der Winkel ist, bei der die kleinste Annäherung erreicht wird (siehe Skizze). Hinweis: Die Substitution $r = 1/x$ hilft weiter. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\arccos(x)\Big|_a^b$. (3 Punkte)

Aufgabe 4 Eindimensionaler elastischer Stoß: (5 Punkte)

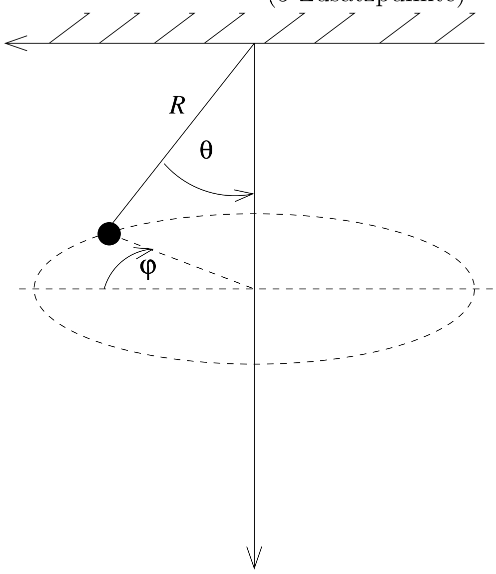
Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 in einer Dimension. Die Massen gleiten reibungsfrei mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_{1a} > 0$ und $v_{2a} < 0$ aufeinander zu und prallen elastisch zurück.

a) Was ist die Geschwindigkeit V des Schwerpunkts im Laborsystem? Finden Sie mittels einer Galileitransformation die Geschwindigkeiten v'_{1a} und v'_{2a} der Teilchen relativ zum Schwerpunkt (d.h. im Schwerpunktssystem). (2 Punkte)

b) Nutzen Sie Energieerhaltung im Schwerpunktssystem um die Geschwindigkeiten v'_{1e} und v'_{2e} der Teilchen relativ zum Schwerpunkt nach dem Stoß zu finden. (1 Punkt)

c) Finden Sie mittels einer Galileirücktransformation die Endgeschwindigkeiten v_{1e} und v_{2e} der Teilchen im Laborsystem. (2 Punkte)

Aufgabe 5* (Zusatzaufgabe) Rotierendes Pendel: (5 Zusatzpunkte)



Ein an der Decke befestigtes starres Pendel (Masse m, Länge R)) bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft. Es kann sich frei in alle Richtungen um den Aufhängungspunkt bewegen. Wir benutzen Polarkoordinaten (siehe Skizze) mit dem Ursprung am Aufhängungspunkt, und schreiben $\vec{v} = \hat{e}_\theta v_\theta + \hat{e}_\phi v_\phi$ für die Pendelgeschwindigkeit. Die Anfangswerte für die Bewegung des Pendels seien $\theta(t=0) = \theta_0$, $v_\phi(t=0) = v_{\phi 0}$ und $v_\theta(t=0) = 0$.

a) Erklären Sie kurz (Rechnung nicht verlangt) warum die z-Komponente L_z des Drehimpulses erhalten ist. Finden Sie (mittels L_z-Erhaltung) v_ϕ als Funktion von θ und $v_{\phi 0}$. (2 Punkte)

b) Wie lautet die Gesamtenergie E als Funktion von v_θ, v_ϕ und θ? Finden Sie mittels Energie- und Drehimpulserhaltung v_θ als Funktion von θ und den Anfangswerten θ_0, $v_{\phi 0}$. (2 Punkte)

c) Der Winkel θ des rotierenden Pendels bewegt sich (nicht-harmonisch) zwischen zwei Extremwerten θ_1 und θ_2. Wie lautet die Bestimmungsgleichung für die Extrema? (1 Punkt)

Lösungsvorschlag zur zweiten Klausur Theoretische Physik A: Klassische Mechanik

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{9 Punkte}}$

a.)

Gegeben ist die Kraft $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{e}_x yz + \vec{e}_y xz + \vec{e}_z xy$. Wir berechnen die Rotation von $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y(xy)-\partial_z(xz)\\ \partial_z(yz)-\partial_x(xy)\\ \partial_x(xz)-\partial_y(yz)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-x\\ y-y\\ z-z\end{pmatrix} = \boxed{\vec{o}}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Da $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{o}$ gilt, ist $\vec{F}$ konservativ. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Somit existiert ein **skalares** Potential U, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\begin{pmatrix}\partial_x U\\ \partial_y U\\ \partial_z U\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-yz\\ -xz\\ -xy\end{pmatrix}$$

Durch Integration der ersten Komponente nach x ergibt sich $U = -yzx + F_1(y,z)$. Man muss bei der Integration also eine Funktion hinzufügen, die nicht von x, sondern nur von y und z abhängt. Diese Funktion fällt nämlich bei der partiellen Differentiation nach x wieder weg. Integrieren wir nun die zweite Komponente, so folgt analog $U = -xzy + F_2(x,z)$, mit dem Unterschied, dass wir nun eine Funktion, die nicht von y abhängt, hinzufügen. Das Potential muss natürlich für beide Fälle gleich sein und damit ergibt sich $F_1(y,z) = F_2(x,z)$. Dies ist nur dann erfüllbar, wenn F_1 und F_2 nur von z abhängen; wir bezeichnen die neue Funktion als $G_1(z)$. Bei der Integration der dritten Komponente folgt $U = -xyz + F_3(x,y)$. Durch Vergleich der zweiten und dritten Beziehung für U ergibt sich $F_2(x,z) = F_3(x,y)$ und analog zu vorher $F_2(x,z) = F_3(x,y) \equiv G_2(x)$. Nun muss natürlich noch $G_1(z) = G_2(x)$ sein, was nur funktioniert, wenn $G_1(z) = C = G_2(x)$, wobei C eine Konstante ist, die weder von x noch von y oder z abhängt. Also gilt:

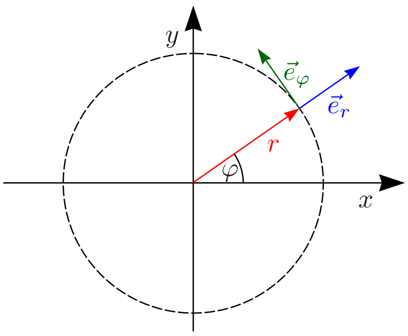
$\boxed{U = -xyz + C}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b.)

Wir gehen aus von der Kraft $\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$. Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ der Zylinderkoordinaten gilt in Abhängigkeit der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$, also der kartesischen Basis:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi$$



Außerdem gilt in Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und damit:

$\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y = r\sin\varphi\vec{e}_x - \cos\varphi\vec{e}_y = -r\vec{e}_\varphi$

Für einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist, gilt $\mathrm{d}\vec{r} = r\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$. Der Einheitskreis ist der spezielle Kreis mit Radius eins, also folgt für diesen $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$. Wir können auf diese Weise das Wegintegral berechnen:

$$I = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi\cdot(-r\vec{e}_\varphi) = -\int\limits_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi r^2 \overset{r=1}{=} \boxed{-2\pi}$$

1 Punkt

Zur Berechnung des Flächenintegrals benötigen wir:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ -x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -2\end{pmatrix} = \boxed{-2\vec{e}_z}$$

1 Punkt

Damit ergibt sich weiter:

$$\int\limits_{A_0}\mathrm{d}A\,\vec{e}_z\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \int\limits_{A_0}\mathrm{d}A\,(-2\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_z = -2A_0 = -2\pi r^2 \overset{r=1}{=} \boxed{-2\pi}$$

1 Punkt

c.)

Wir betrachten folgenden Vorgang:

Da es sich um einen zentralen Stoß handelt, findet der Prozess in einer Dimension statt. Außerdem gilt $v_1^f < v_2^f$. Der Stoß ist außerdem elastisch, womit sowohl Impulserhaltung als auch Energieerhaltung gilt:

- Impulserhaltung: $v_1^i = v_1^f + v_2^f$ (1)
- Energieerhaltung:

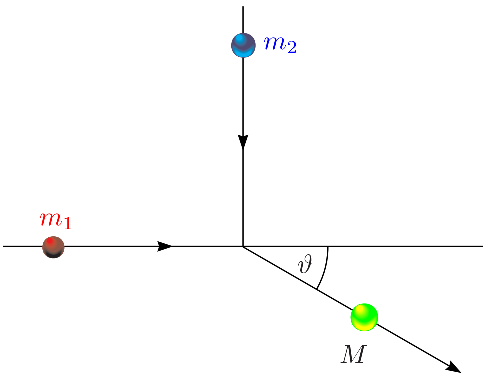
$$\frac{m}{2}{v_1^i}^2 = \frac{m}{2}{v_1^f}^2 + \frac{m}{2}{v_2^f}^2 \Leftrightarrow {v_1^i}^2 = {v_1^f}^2 + {v_2^f}^2 \qquad (2)$$

Durch Quadrieren von Gleichung (1) und Vergleich mit Gleichung (2) ergibt sich $v_1^f v_2^f = 0$. Es ist also entweder $v_1^f = 0$ und $v_2^f = v_1^i$ oder $v_2^f = 0$ und $f_1^f = v_1^i$. Da $v_1^f < v_2^f$ ist, ergibt sich:

$\boxed{v_1^f = 0 \text{ und } v_2^f = v_1^i}$

1 Punkt

d.)



Da der Stoß total inelastisch verläuft, trennen sich die beiden Körper nach dem Stoßprozess nicht mehr voneinander. Es entsteht ein Körper der Masse $M = m_1 + m_2$. Bei einem inelastischen Stoß gilt **nur Impulserhaltung**, aber **keine Energieerhaltung**. Wir werten die Impulserhaltung für die x- und y-Richtung aus:

- ✳ x-Richtung:

  $$m_1 v_1 = Mv\cos\vartheta \Rightarrow m_1^2 v_1^2 = M^2 v^2 \cos^2\vartheta$$ 0,5 Punkte

- ✳ y-Richtung:

  $$m_2 v_2 = Mv\sin\vartheta \Rightarrow m_2^2 v_2^2 = M^2 v^2 \sin^2\vartheta$$ 0,5 Punkte

Wir formen die erste Gleichung mit $\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$ um und setzen die zweite Gleichung ein:

$$m_1^2 v_1^2 = M^2 v^2 \cdot \cos^2\vartheta = M^2 v^2 \cdot (1 - \sin^2\vartheta) = M^2 v^2 - M^2 v^2 \sin^2\vartheta = M^2 v^2 - m_2^2 v_2^2$$

Wir lösen nach v^2 auf:

$$v^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{M^2} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}}$$ 1 Punkt

Aufgabe 2 — 4 Punkte

a.)

Wir gehen aus von der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t) f(\omega)$$

Wir schreiben hierbei die äußere Kraft $f(t)$ als Fourier-Rücktransformierte von $\widetilde{f}(\omega)$ und $x(t)$ als Rücktransformierte von $\widetilde{x}(\omega)$:

$$x(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t)\widetilde{x}(\omega)$$

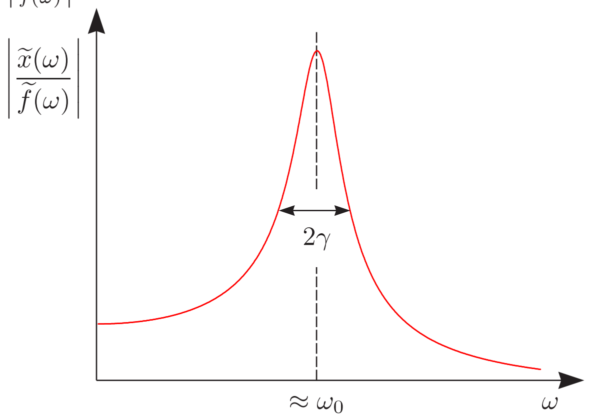
Damit geht unsere Differentialgleichung über in:

$$(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2)\widetilde{x}(\omega) = \widetilde{f}(\omega)$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $\widetilde{x}(\omega)$ auflösen:

$$\boxed{\widetilde{x}(\omega) = \frac{\widetilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \text{ mit } \left|\frac{\widetilde{x}(\omega)}{\widetilde{f}(\omega)}\right| = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}}$$ 1 Punkt

$\left|\frac{\widetilde{x}(\omega)}{\widetilde{f}(\omega)}\right|$ hat die Form einer Resonanzkurve:



1 Punkt

b.)

Als erstes müssen wir die FOURIER-Transformierte der äußerem Kraft $f(t) = f\cos(\omega_1 t)$ ausrechnen:

$$\boxed{\widetilde{f}(\omega) = \pi f\left[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)\right]}$$ 1 Punkt

Dann erhalten wir damit $x(t)$ durch FOURIER-Rücktransformation von $\widetilde{x}(\omega)$:

$$x(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\exp(\mathrm{i}\omega t)\widetilde{f}(\omega)\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega\right]^{-1} =$$

$$= \boxed{\frac{f}{2}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega_1} + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t)}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega_1}\right]} =$$ 1 Punkt

$$= \boxed{\frac{f}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2}\left[(\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos(\omega_1 t) + 2\gamma\omega_1\sin(\omega_1 t)\right]}$$

Aufgabe 3 — 12 Punkte

a.)

Mit der Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ schreiben wir die Kraft als:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -a\frac{\vec{r}}{r^4} = -a\frac{\hat{e}_r}{r^3}$$

Das zugehörige Potential lautet:

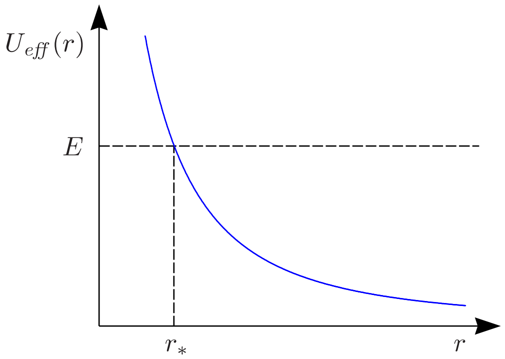
$$U(r) = -\frac{1}{2}\frac{a}{r^2} \text{ denn } \vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Als effektives Potential folgt damit:

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{a}{2r^2} = \frac{c}{r^2} \text{ mit } c = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\mu} - a\right)}$$ 2 Punkte

b.)

Das effektive Potential ist eine Funktion proportional zu $\frac{1}{r^2}$, sieht also folgendermaßen aus:



2 Punkte

Es ist $L > 0$ und $E > 0$. Energieerhaltung verbietet, dass $E < U_{eff}(r)$ ist. Deswegen kann r nie kleiner als r_* werden, womit die Teilchen nie zusammenstoßen. 1 Punkt

Wir erhalten r_* aus:

$$U_{eff}(r_*) = E \Rightarrow \boxed{r_* = \sqrt{\frac{C}{E}}}$$ 1 Punkt

c.)

Die Gesamtenergie E ergibt sich aus der kinetischen Energie und dem effektiven Potential:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\mathit{eff}}$$

Wir lösen nach $\dot{r}$ auf und erhalten:

$$\dot{r} = \pm\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left[E - \frac{c}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$ 1 Punkt

Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung 1.Ordnung für $r(t)$ die wir durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration lösen:

$$\int \mathrm{d}t = \pm\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int \mathrm{d}r\,\frac{r}{\sqrt{r^2E - c}}$$

Mit dem angegebenen Integral ergibt sich hieraus:

$$t - t_* = \pm\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{r^2E - c}}{E}$$ 1 Punkt

Wir lösen schließlich nach $r(t)$ auf:

$$\boxed{r(t) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}(t - t_*)^2 + \frac{c}{E}} \text{ mit } r(t_*) = \sqrt{\frac{c}{E}} = r_*}$$ 1 Punkt

t_* ist also die Zeit der kleinsten Annäherung.

d.)

Wir gehen aus vom erhaltenen Drehimpuls:

$$L = \mu r^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\dot{r} = \frac{L}{\mu r^2}$$

Wir erhalten damit:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mu}{2}r^2\dot{r} = \pm\frac{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}{L}r\left(r^2E - c\right)^{\frac{1}{2}}}$$ 1 Punkt

Auch hier handelt es sich analog zur vorher um eine Differentialgleichung 1.Ordnung, dieses mal aber für die Bahnkurve $r(\varphi)$. Durch Trennung der Veränderlichen und Integration erhalten wir wieder:

$$\int \mathrm{d}\varphi = \pm\frac{L}{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}\int \mathrm{d}r\,\frac{1}{r\left[r^2E - c\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi - \varphi_* = \pm\frac{L}{(2\mu c)^{\frac{1}{2}}}\cdot\arccos\left(\sqrt{\frac{c}{E}}\cdot\frac{1}{r}\right)$$ 1 Punkt

$$\boxed{r(\varphi) = \sqrt{\frac{c}{E}}\cdot\frac{1}{\cos\left[(\varphi - \varphi_*)\cdot\frac{(2\mu c)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]}}$$ 1 Punkt

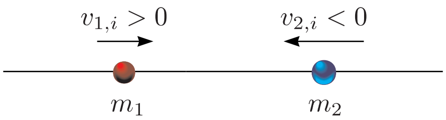
Es gilt

$$r(\varphi_*) = \sqrt{\frac{c}{E}}$$

womit φ_* der Winkel der kleinsten Annäherung ist.

Aufgabe 4 $\boxed{\text{5 Punkte}}$

a.)



Die Schwerpunktmasse ist die Gesamtmasse des Systems, also $M = m_1+m_2$. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$$\boxed{V = \frac{1}{M}\,(m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a})} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

V ist die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts. Die zugehörige GALILEI-Transformation ins Schwerpunktsystem lautet:

$$\boxed{v'_{ja} = v_{ja} - V \text{ für } j = 1,\, 2} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

b.)

Im Schwerpunktsystem ist die kinetische Energie **jedes einzelnen** Teilchens erhalten; es gilt also für die Endgeschwindigkeiten:

$$\boxed{v'_{je} = -v'_{ja} \text{ für } j = 1,\, 2} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Die Geschwindigkeiten v'_{je} sind negativ, weil die Teilchen zurückprallen.

c.)

Durch Rücktransformation ergibt sich:

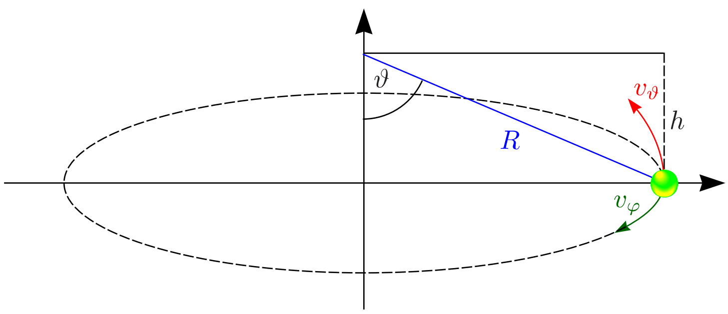
$$v_{je} = v'_{je} + V = -v'_{ja} + V = \boxed{-v_{ja} + 2V} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Setzen wir nun noch den obigen Ausdruck für V explizit ein, so erhalten wir das Ergebnis:

$$v_{1e} = -v_{1a} + 2\left(\frac{m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{\frac{m_1 v_{1a} + m_2(2v_{2a} - v_{1a})}{m_1 + m_2}}$$

$$v_{2e} = -v_{2a} + 2\left(\frac{m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{\frac{m_2 v_{2a} + m_1(2v_{1a} - v_{2a})}{m_1 + m_2}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe) $\boxed{\text{5 Zusatzpunkte}}$



a.)

Es wirkt keine Kraft in φ-Richtung, womit L_z erhalten ist.
oder: $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Die Gewichtskraft gibt kein Drehmoment in z-Richtung, womit L_z erhalten ist.
[Genauere Begründung (war nicht gefordert): $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = R(\vec{e}_r \times \vec{F})$; die Kraft setzt sich zusammen aus $\vec{F} = -mg\vec{e}_z - F_{zp}\vec{e}_r$, wobei $-F_{zp}$ die Kraft ist, welche der Zentrifugalkraft entgegenwirkt und diese ausbalanciert. Die letztere trägt nicht zu $\vec{e}_r \times \vec{F}$ bei, und die Gewichtskraft gibt keinen Beitrag zum Drehmoment in z-Richtung: es gilt $\dot{\vec{L}} = -mgR\vec{e}_\varphi$, und da $\vec{e}_\varphi \vec{e}_z = 0$ folgt $\dot{L}_z = 0$.]
Damit ergibt sich:

$$L = mv_{\varphi_0} R \sin\vartheta_0 = mv_\varphi R \sin\vartheta$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{L}{mR\sin\vartheta} = \frac{v_{\varphi_0}\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

[Genauere Herleitung von L_z (war nicht gefordert):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mR\vec{e}_r \times (v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi) = mR(v_\vartheta \vec{e}_\varphi - v_\varphi \vec{e}_\vartheta)$$

und mit $\vec{e}_\varphi \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_\vartheta \vec{e}_z = -\sin\theta$ ergibt sich $L_z = mRv_\varphi \sin\vartheta$.]

b.)

Die gesamte Energie ergibt sich wieder aus kinetischer und potentieller Energie:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\varphi_0}^2 - mgR\cos\vartheta_0 = \boxed{\frac{1}{2}m\left(v_\varphi^2 + v_\vartheta^2\right) - mgR\cos\vartheta} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Wir lösen das ganze nach v_ϑ auf:

$$v_\vartheta = \pm\left[v_{\varphi_0}^2 - v_\varphi^2 + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Nun ersetzen wir noch v_φ durch die Beziehung aus Teilaufgabe a.):

$$\boxed{v_\vartheta = \pm\left[v_{\varphi_0}^2\left(1 - \frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\right) + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

c.)

Die Extremwerte der Winkel ergeben sich aus der Bedingung $v_\vartheta = 0$.

$$v_{\varphi_0}^2\left(\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0\right) + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\sin^2\vartheta = 0$$

$$\boxed{\sin^2\vartheta\left[v_{\varphi_0}^2 + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right] = v_{\varphi_0}^2\sin^2\vartheta_0} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Die Gleichung wird erfüllt durch $\vartheta_1 = \vartheta_0$. Dies ist der minimale Winkel für ϑ, da die Anfangsbedingung sofort zu einem Anstieg in ϑ führt. (Es gibt noch eine zweite Lösung θ_2, die das Maximum für ϑ darstellt.)