

Aufgabe 1: Kräfte

Ein Massenpunkt bewege sich in dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = ay\hat{e}_x + ax\hat{e}_y + b\hat{e}_z$, wobei a, b positive Konstanten sind.

- Zeigen Sie, dass es sich um eine konservative Kraft handelt. Ist \vec{F} eine Zentralkraft? (1,5 Punkte)
- Wie lautet die potenzielle Energie der Kraft \vec{F} ? (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Arbeit, die insgesamt aufzubringen ist, um den Massenpunkt vom Ursprung aus wie folgt zu verschieben: $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (a, a, 0) \rightarrow (0, a, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$. (0,5 Punkt)

Aufgabe 2: 1-dimensionaler elastischer Stoß

Zwei Massenpunkte mit unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 gleiten reibungsfrei mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_{1i} > 0$ und $v_{2i} < 0$ im Laborsystem zentral aufeinander zu und prallen elastisch zurück.

- Was ist die Geschwindigkeit V_S des Schwerpunktes im Laborsystem? Finden Sie mittels einer Galilei-Transformation die Geschwindigkeiten v'_{1i} und v'_{2i} der Teilchen im Schwerpunktsystem. (2 Punkte)
- Nutzen Sie Impuls- und Energieerhaltung im Schwerpunktsystem, um die Geschwindigkeiten v'_{1f} und v'_{2f} der Teilchen nach dem Stoß in Abhängigkeit von v'_{1i} und v'_{2i} zu finden. (2 Punkte)
- Finden Sie mittels einer Galilei-Rücktransformation die Endgeschwindigkeiten v_{1f} und v_{2f} im Laborsystem in Abhängigkeit von v_{1i} und v_{2i} . Was passiert, wenn $m_1 \gg m_2$? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Zentralkraft

Zwei Teilchen, die eine Kraft $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -a \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^4}$ aufeinander ausüben, fliegen aneinander vorbei. Es wirken keine externe Kräfte. Die Energie der Relativbewegung sei $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$, mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

- Berechnen Sie das Potenzial $U(r)$, das zu dieser Wechselwirkungskraft gehört. Wählen Sie den Nullpunkt des Potenzials bei $r \rightarrow \infty$. (1 Punkt)
- Reduzieren Sie das Problem auf ein eindimensionales für $r = |\vec{r}|$ mit effektivem Potenzial. Zeigen Sie, dass $U_{\text{eff}}(r) = c/r^2$, und drücken Sie c durch a , μ und den Drehimpuls der Relativbewegung ($L = \mu r^2 \dot{\phi}$) aus. Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben sind auch ohne Kenntnis der Konstante c lösbar. (2 Punkte)
- In den nachfolgenden Aufgaben betrachten wir nur den Fall $c > 0$ und $E > 0$. Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$ und zeichnen Sie E in die Skizze ein. Erklären Sie anhand ihrer Skizze, warum die Teilchen nicht aufeinander stoßen. Zeichnen Sie den Abstand kleinster Annäherung, r_{min} , in Ihre Skizze ein. Drücken Sie r_{min} als Funktion von E und c aus. (2 Punkte)

- (d) Verwenden Sie die Energieerhaltung, um eine Gleichung für \dot{r} herzuleiten. Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Separation der Variablen, und bestimmen Sie r als Funktion von $t - t_{\min}$ (wobei $r(t_{\min}) = r_{\min}$). (3 Punkte)

Aufgabe 4: Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators durch Fourier-Transformation

Ein harmonischer Oszillator (Position $x(t)$, Masse m , Federkonstante $k = m\omega_0^2$) mit schwacher Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$ wird durch eine Kraft $F(t) = mf(t)$ getrieben.

- (a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{x}(\omega)$. (2 Punkte)
- (b) Skizzieren Sie $\left| \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \right|$ (1 Punkt)
- (c) Für den Fall $F(t) = mf_0 \cos(\omega_1 t)$, bestimmen Sie $\tilde{f}(\omega)$ und finden Sie durch Fourier-Rücktransformation von $\tilde{x}(\omega)$ eine partikuläre Lösung $x(t)$. Drücken Sie das Ergebnis durch sin- und cos-Funktionen aus. (3 Punkte)
- (d) Bonusaufgabe: Benutzen Sie Fourier-Transformationen, um die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators zu bestimmen. Hinweis: Finden Sie zunächst $\tilde{G}(\omega)$. Zur Rücktransformation ist folgendes Integral nützlich: (2 Bonuspunkte)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - a - ib][\omega + a - ib]} = i\theta(t) \frac{e^{(ia-b)t} - e^{(-ia-b)t}}{2a}.$$

Aufgabe 5: Impuls- und Drehimpulserhaltung

Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 (Koordinaten \vec{r}_1 und \vec{r}_2) mit einer Wechselwirkungskraft entlang des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Es wirken keine externe Kräfte.

- (a) Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls \vec{P} und der Gesamtdrehimpuls \vec{L} in diesem System erhalten sind. (3 Punkte)
- (b) Drücken Sie die beiden Größen \vec{P} und \vec{L} in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten aus. Schreiben Sie $\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}}$, wobei \vec{L}_S und \vec{L}_{rel} der Drehimpuls des Schwerpunktes und der relative Drehimpuls sind. (3 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, dass \vec{L}_S und \vec{L}_{rel} beide separat erhalten sind. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b). (1 Punkt)

Aufgabe 1: Kräfte

- (a) Wir berechnen die Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, a - a) = 0$. Damit ist die Kraft konservativ. \vec{F} ist keine Zentralkraft, da sie sich nicht die Form $\vec{F} = \alpha \vec{r}$ besitzt.
- (b) Für die potenzielle Energie muss gelten: $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -ay$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y = -ax$, und $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z = -b$. Man sieht dann einfach, dass $U(x, y, z) = -axy - bz + c$ die gesuchte potenzielle Energie ist (wobei c eine beliebige Konstante ist).
- (c) Die Arbeit ist gegeben durch $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Da \vec{F} konservativ ist und über eine geschlossene Bahn integriert wird, ist die geleistete Arbeit gleich 0.

Aufgabe 2: 1-dimensionaler elastischer Stoß

- (a) Die Koordinate des Schwerpunkts ist $\frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2)$, wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts finden wir durch Ableiten nach t :

$$V_S = \frac{1}{M}(m_1v_{1i} + m_2v_{2i}).$$

Die zugehörige Galilei-Transformation in das Schwerpunktsystem lautet:

$$v'_{1i} = v_{1i} - V_S \quad \text{und} \quad v'_{2i} = v_{2i} - V_S.$$

- (b) Aus der Impulserhaltung finden wir:

$$m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = m_1v'_{1f} + m_2v'_{2f}.$$

Im Schwerpunktsystem gilt nun aber $m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = 0$, und daraus finden wir: $v'_{2i} = -\frac{m_1}{m_2}v'_{1i}$, und außerdem $v'_{2f} = -\frac{m_1}{m_2}v'_{1f}$. Die Energie bleibt ebenfalls erhalten, also muss gelten:

$$m_1(v'_{1i})^2 + m_2(v'_{2i})^2 = m_1(v'_{1f})^2 + m_2(v'_{2f})^2.$$

Jetzt können wir v'_{2i} und v'_{2f} aus dieser Gleichung eliminieren, und finden $(v'_{1f})^2 = (v'_{1i})^2$. Analog erhalten wir $(v'_{2f})^2 = (v'_{2i})^2$. Da die Teilchen laut Aufgabenstellung zurückprallen, erhalten wir daraus

$$v'_{1f} = -v'_{1i} \quad \text{und} \quad v'_{2f} = -v'_{2i}.$$

- (c) Durch Rücktransformation ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v'_{1f} + V_S = -v'_{1i} + V_S = -v_{1i} + 2V_S, \\ v_{2f} &= v'_{2f} + V_S = -v'_{2i} + V_S = -v_{2i} + 2V_S. \end{aligned}$$

Setzen wir den Ausdruck für V_S explizit ein, so erhalten wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= -v_{1i} + 2 \left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 (2v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2}, \\ v_{2f} &= -v_{2i} + 2 \left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2 v_{2i} + m_1 (2v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Für $m_1 \gg m_2$ finden wir: $v_{1f} \approx v_{1i}$ und $v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}$.

Aufgabe 3: Zentralkraft

- (a) Mit dem Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ schreiben wir die Kraft als: $\vec{F} = -a \frac{\vec{r}}{r^4} = -a \frac{\hat{e}_r}{r^3}$. Das zugehörige Potenzial lautet:

$$U(r) = -\frac{a}{2r^2} + \mathcal{D},$$

denn dieses erfüllt die Bedingung $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Wir wählen die Konstante $\mathcal{D} = 0$, damit $U(r \rightarrow \infty) = 0$.

- (b) Wir schreiben $\vec{r} = r\hat{e}_\rho$ in Zylinderkoordinaten. Für die Geschwindigkeit finden wir dann $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_\rho + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$ (mit $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi}\hat{e}_\phi$, siehe Übungsblatt 11). Damit ergibt sich: $(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$, wobei wir den erhaltenen Drehimpuls $L = \mu r^2 \dot{\phi}$ eingesetzt haben. Wir finden für die relative Energie:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad \text{mit } U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{a}{2r^2} = \frac{c}{r^2},$$

wobei $c = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{\mu} - a \right)$.

- (c) Das effektive Potential ist eine Funktion proportional zu $1/r^2$. Es gilt $L > 0$ und $E > 0$. Die Energieerhaltung verbietet, dass $E < U_{\text{eff}}(r)$ ist. Deswegen kann r nie kleiner als r_{min} werden, weshalb die Teilchen nicht aufeinander stoßen. Wir erhalten r_{min} aus:

$$E = U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) \Rightarrow r_{\text{min}} = \sqrt{\frac{c}{E}}.$$

- (d) Aus den Ausdrücken für die relative Energie folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}})} \Leftrightarrow dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{c}{r^2}}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{r dr}{\sqrt{Er^2 - c}}.$$

Integration dieser Gleichung ergibt:

$$t - t_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\text{min}}}^r \frac{r dr}{\sqrt{Er^2 - c}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\text{min}}^2}^{r^2} \frac{du}{\sqrt{Eu - c}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{\sqrt{Er^2 - c}}{E}.$$

Auflösen nach $r(t)$ liefert:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{\mu} (t - t_{\text{min}})^2 + \frac{c}{E}}.$$

Aufgabe 4: Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators durch Fourier-Transformation

(a) Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators lautet:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega),$$

wobei wir die äußere Kraft $f(t)$ als Fourier-Rücktransformierte von $\tilde{f}(\omega)$ geschrieben haben. Machen wir das Gleiche für $x(t)$, so ergibt sich

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir dann

$$(-\omega^2 + 2i\gamma + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega),$$

und daraus

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}.$$

(b) Es gilt $\left| \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$. Dieser Ausdruck hat die Form einer Resonanzkurve:

(c) Die Fourier-Transformierte der äußeren Kraft $f(t)$ ist gegeben durch:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f_0 \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f_0 \frac{e^{-i(\omega - \omega_1)t} + e^{-i(\omega + \omega_1)t}}{2} = \pi f_0 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)].$$

Damit erhalten wir $x(t)$ durch Fourier-Rücktransformation von $\tilde{x}(\omega)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \\ &= \frac{f_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \\ &= \frac{f_0}{2} \left[\frac{e^{i\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 2i\gamma\omega_1} + \frac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) - 2i\gamma\omega_1} \right] \\ &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2} [(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t) + 2\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t)]. \end{aligned}$$

(d) Zur Bestimmung der Green'schen Funktion betrachten wir $f(t) = \delta(t)$, d.h. $\tilde{f}(\omega) = 1$. Die Green'sche Funktion finden wir dann aus

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_+) (\omega - \omega_-)}, \end{aligned}$$

mit $\omega_{\pm} = \pm\Omega + i\gamma$, und $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Mit der angegebenen Stammfunktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{-i\theta(t)}{2\Omega} [e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}] e^{-\gamma t} \\ &= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Impuls- und Drehimpulserhaltung

- (a) Der Gesamtimpuls ist: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Damit finden wir: $\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12}^{\text{WW}} + \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{21}^{\text{WW}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} = 0$, da $\vec{F}_{12}^{\text{WW}} = -\vec{F}_{21}^{\text{WW}}$ gilt, und die externen Kräfte Null sind. Der Gesamtimpuls ist also erhalten. Der Gesamtdrehimpuls ist: $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= m_1 \dot{\vec{v}}_1 \times \vec{v}_1 + m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{v}}_1 + m_2 \dot{\vec{v}}_2 \times \vec{v}_2 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{v}}_2 \\ &= 0 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + 0 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{\text{WW}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{\text{WW}} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}^{\text{WW}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil die Wechselwirkungskraft parallel zu $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist.

- (b) Die Schwerpunktskoordinate ist $\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$. Daraus folgt sofort: $M \dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{P}}$. Die Relativkoordinate ist $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Wir können jetzt die Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 mit Hilfe der Schwerpunkts- und Relativkoordinate ausdrücken. Wir erhalten:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r},$$

wobei wir die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ definiert haben. Damit ergibt sich für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\ &= m_1 \left(\vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= m_1 \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2^2}{M^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2 \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{M^2} (m_2 + m_1) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}}. \end{aligned}$$

- (c) $\dot{\vec{L}}_S = M \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + M \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = 0 + \vec{R} \times \dot{\vec{P}} = 0 + 0 = 0$. Der Drehimpuls des Schwerpunktes \vec{L}_S ist erhalten. Wir haben in Teilaufgabe (a) schon bewiesen, dass auch der Gesamtdrehimpuls \vec{L} erhalten ist. Da $\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}}$, folgt damit dass auch \vec{L}_{rel} erhalten ist.