Aufgabe 1: Vektoren **[5]**

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (1, -3, 2) \qquad \vec{b} = (2, 4, 1)\ .$$

$\vec{b}$ lässt sich in eine Parallel– und eine Senkrechtkomponente ($\vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}$) bezüglich $\vec{a}$ zerlegen. Berechnen Sie $\vec{b}_{\perp}$.

Lösung:

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{||} = \vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}^2}\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} - \frac{2-12+2}{1+9+4}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}18\\16\\15\end{pmatrix}\ .$$

Probe bestätigt $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp} = 0$.

Aufgabe 2: Bewegung im Potential **[10]**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im $\mathbb{R}^3$ im Potential ($\beta, V_0, r_0 = \text{const.}, r = |\vec{r}|$)

$$V(r) = \beta\left[\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right] + V_0\ .$$

Bestimmen Sie für die Gesamtenergie $E = V_0$ und den Drehimpuls $L = r_0\sqrt{2m\beta}$ die Winkelgeschwindigkeit der Radialbewegung am äußeren Umkehrpunkt der Trajektorie.

Lösung: Am Umkehrpunkt steckt die gesamte Energie im effektiven Potential, weil es keine kinetische Energie in $\hat{r}$ Richtung gibt. Weiterhin soll $E = V_0$ gelten, also

$$E = V_0 = \beta\left[\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right] + V_0 + \frac{L^2}{2mr_0^2}\frac{r_0^2}{r^2} = V_{\text{eff}}(r)\ .$$

V_0 hebt sich weg. Nach Einsetzen des gegebenen L hebt sich auch der Faktor β heraus. Es bleibt nach Mulitplikation mit $(r/r_0)^{12}$ die Gleichung

$$\frac{3}{4} - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{5} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{10} = 0$$

mit den Lösungen $(r/r_0)^5 = 1 \pm 1/2$. Damit ist der äußere Umkehrpunkt bei $r_+ = (3/2)^{1/5} r_0$. Wegen $L = mr^2\dot{\phi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit am Umkehrpunkt ist $\dot{\varphi} = L/(mr_+^2)$. Einsetzen von r_+ und L ergibt

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{(3/2)^{2/5}}\sqrt{\frac{\beta}{m}}\frac{1}{r_0}\ .$$

Aufgabe 3: Kleine Auslenkungen **[8]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im eindimensionalen Potential

$$V(x) = V_0 \sin(kx) \,.$$

Wie lautet die Frequenz ω der Oszillation des Teilchens für kleine Auslenkungen um eines der Minima des Potentials?

Lösung: Für kleine Auslenkungen um den Ruhepunkt können wir das Potential entwickeln. Wegen der Periodizität des Potentials ist die resultierende Bewegung um alle Minima gleich und wir wählen beliebig das Minimum bei $x_0 = -\frac{\pi}{2}$. Für die Taylorentwicklung benötigen wir die Ableitungen des Potentials

$$V'(x) = kV_0 \cos(kx) \,, \qquad V''(x) = -k^2 V_0 \sin(kx) \,.$$

Damit erhalten wir die Entwicklung um x_0

$$\begin{aligned} V(x) &\approx \frac{1}{0!}V(-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{1!}V'(-\tfrac{\pi}{2})(x+\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{2!}V''(-\tfrac{\pi}{2})(x+\tfrac{\pi}{2})^2 + \cdots \\ &= -V_0 + \frac{1}{2}k^2 V_0 (x+\tfrac{\pi}{2})^2 \,. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizienten des quadratischen Terms, $k^2 V_0$, erhalten wir die gesuchte Frequenz $\omega = k\sqrt{V_0/m}$ der Oszillation des Teilchens um das Minimum.

Aufgabe 4: Kraft und Arbeit **[9]**

Wir untersuchen ein Kraftfeld ($\alpha = \text{const.}$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \, (y, z, x) \,.$$

Wie groß ist die Arbeit, die gegen das Feld aufgebracht werden muss, um eine Punktmasse auf einem Kreis mit Radius R in der x–y–Ebene einmal um den Ursprung zu bewegen?

Lösung: Wir berechnen die Arbeit mit dem Wegintegral

$$W = -\int_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,.$$

Den Kreisweg in der x–y Ebene parametrisieren wir am einfachsten mit dem Polarwinkel φ, $\vec{s}(\varphi) = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Für das Integral berechnen wir daraus per Kettenregel $\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi = R(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$. Schließlich parametrisieren wir auch die Kraft mit den Parametern des Weges, $\vec{F}(\vec{s}(\varphi)) = \alpha R(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$. Damit erhalten wir

$$W = -\int_0^{2\pi} \alpha \begin{pmatrix} R\sin\varphi \\ 0 \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi = \alpha R^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi}_{=\pi} = \alpha\pi R^2 \,.$$

Aufgabe 5: Rotation **[6]**

Gegeben ist das Kraftfeld ($\alpha, k = \text{const.}$)

$$\vec{F} = \alpha \left(k\sin(kx), \frac{c}{z}, \frac{y}{z^{p/2}} \right) .$$

Finden Sie Werte für die Konstanten c und p so, dass die Rotation des Feldes verschwindet.

Lösung: Wir berechnen die Rotation komponentenweise,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{z^{p/2}} - (-\frac{c}{z^2}) \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{z^{p/2}} + \frac{c}{z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die x–Komponente kann offenbar mit $p = 4$ und $c = -1$ zum Verschwinden gebracht werden.

Aufgabe 6: Oszillator mit äußerer Kraft **[2 + 7 + 3 = 12]**

In x-Richtung bewege sich ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit Frequenz ω_0. Von außen wirkt die Kraft

$$\vec{F}(t) = f_0\, \mathrm{e}^{\lambda t} \cos(\omega t)\, \hat{x} \qquad (f_0, \lambda, \omega > 0 \in \mathbb{R} = \text{const.}).$$

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung.

(c) Wie lauten Amplitude und Phase des für $\lambda t \gg 1$ dominierenden Teils der Lösung?

Lösung:

(a) Der ungedämpfte harmonische Oszillator mit einer äußeren Kraft genügt der Differentialgleichung ($a_0 = f_0/m$)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= a_0\, \mathrm{e}^{\lambda t} \cos(\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} \left(\mathrm{e}^{(\lambda + i\omega)t} + \mathrm{e}^{(\lambda - i\omega)t} \right) . \end{aligned}$$

(b) Die Lösung $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$ setzt sich zusammen aus der bekannten Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Konstanten A_0 und φ_0 müssen durch (hier nicht spezifizierte) Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Für die spezielle Lösung machen wir einen Ansatz mit den gleichen Exponentialfunktionen wie in der Inhomogenität,

$$x_s(t) = A\mathrm{e}^{(\lambda + i\omega)t} + B\mathrm{e}^{(\lambda - i\omega)t} .$$

A, B erhalten wir durch einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung,

$$A\big((\lambda + i\omega)^2 + \omega_0^2\big)\mathrm{e}^{(\lambda + i\omega)t} + B\big((\lambda - i\omega)^2 + \omega_0^2\big)\mathrm{e}^{(\lambda - i\omega)t} = \frac{a_0}{2} \left(\mathrm{e}^{(\lambda + i\omega)t} + \mathrm{e}^{(\lambda - i\omega)t} \right) .$$

Die beiden Exponentialfunktionen sind voneinander unabhängig, daher machen wir einen Koeffizientenvergleich und finden

$$A = \frac{a_0/2}{(\lambda + i\omega)^2 + \omega_0^2}\,, \qquad B = \frac{a_0/2}{(\lambda - i\omega)^2 + \omega_0^2}\,.$$

Für die spezielle Lösung erweitern wir zum gemeinsamen Hauptnenner und erhalten

$$\begin{aligned} x_s(t) = \frac{(a_0/2)\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \Big[&\big((\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2) - 2i\lambda\omega\big)\mathrm{e}^{i\omega t} \\ &+ \big((\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega\big)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Big]\,. \end{aligned}$$

Den Term in der eckigen Klammer schreiben wir mit dem Faktor $1/2$ in $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ um,

$$x_s(t) = \frac{a_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}\Big[(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\lambda\omega\sin\omega t\Big]\,.$$

(c) Schließlich interessieren wir uns für die physikalische Fragestellung nach Amplitude und Phase der Anregung. Für große λt wird die homogene Lösung vernachlässigbar und wir bekommen lediglich den anwachsenden Term der speziellen Lösung. Dazu schreiben wir $x_s(t)$ mit Hilfe der Identität

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\big(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t\big) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$$

um. Wir lesen ab $\alpha = A\cos\varphi$ und $\beta = -A\sin\varphi$, so dass $\tan\varphi = -\beta/\alpha$ und $A^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Damit bekommen wir die spezielle Lösung

$$x_s(t) = \frac{a_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{\sqrt{(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}\cos\left\{\omega t - \arctan\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2}\right\}\,,$$

von der wir Amplitude und Phase direkt ablesen können.

$\sum_{\mathbf{A1-A6}} = \mathbf{50}$

Mit der folgenden Aufgabe erwerben Sie Bonuspunkte!

Aufgabe 7: Kurve **[2 + 2 + 1 + 5 = 10]**

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t - 1, \frac{t^2}{2} - t - 1\right) .$$

Berechnen Sie

(a) den normierten Tangentenvektor $\hat{t}$,

(b) die Krümmung κ,

(c) den Radius ρ des Krümmungskreises,

(d) die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen (die Integration soll ausgeführt werden).

Lösung:

(a) Wir erhalten durch differenzieren die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = (t+1, t-1)$ mit dem Betrag $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$, also

$$\hat{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{(t+1, t-1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}} .$$

(b) Wir verwenden $\kappa = |\mathrm{d}\hat{t}/\mathrm{d}s|$. Mit Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion können wir κ umschreiben als $\kappa = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} / \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(t+1)}{1+t^2}, \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(t-1)}{1+t^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{1+t^2-t(t+1)}{1+t^2}, \frac{1+t^2-t(t-1)}{1+t^2},\right) = \frac{(1-t, 1+t)}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} .\end{aligned}$$

Die Bogenlänge $s(t)$ erhalten wir durch Integrieren des Geschwindigkeitsbetrages; $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ist dann der Betrag der Geschwindigkeit, den wir schon in (a) berechnet haben, $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$. Damit ist

$$\kappa^2 = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|^2 = \left|\frac{(1-t, 1+t)}{2(1+t^2)^2}\right|^2 = \frac{1}{2(1+t^2)^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

(c) Der Radius des Krümmungskreises lautet $\rho(t) = 1/\kappa = \sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$.

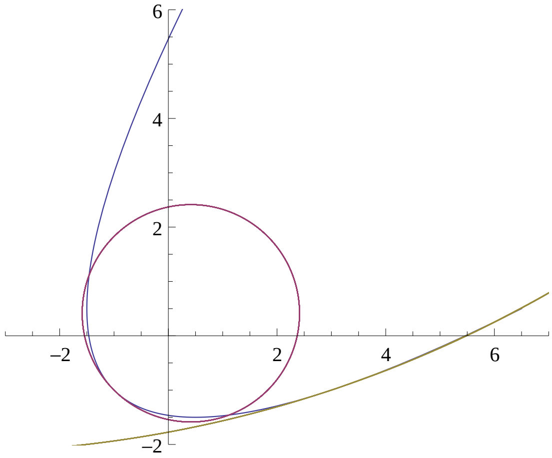

Abbildung 1: Graph von $\vec{r}(t)$ (gedrehte Parabel), mit Krümmungskreisen bei $t = 0$ und $t = 2$.

(d) Die Länge der Kurve von $t = 0$ aus gemessen ist

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}| \, \mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{2}\sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t \, .$$

Wurzelhaltige Integrale werden am besten mit einer trigonometrischen Substitution gelöst. In diesem Fall bietet sich jedoch wegen $1 + t^2$ die Substitution $t = \sinh x$ an, weil $\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$ und $\mathrm{d}t = \cosh x \, \mathrm{d}x$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t &= \int \cosh^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2\right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + 2x \right) = \frac{1}{4} \left(\sinh(2x) + 2x \right) \, . \end{aligned}$$

Für die Rücksubstitution sollten wir das Ergebnis durch $\sinh x$ ausdrücken. Es gilt

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = 2 \sinh x \cosh x \\ &= 2 \sinh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, , \end{aligned}$$

also

$$\int \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{Arsinh} t \right) \, .$$

Damit erhalten wir die gesuchte Länge der Kurve

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{Arsinh} t \right) \, .$$