Lösungsvorschlag Theoretische Physik F
Übungsblatt 4

Prof. Dr. G. Schön und PD Dr. M. Eschrig

Sommersemester 2006

Aufgabe 10 **16 Punkte**

a.)

Die Koeffizienten zu den $e^{iN\chi}$-Faktoren sind gerade die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Prozess stattfindet, bei dem N Elektronen nach rechts ($1 \to 2$) transportiert werden. Analog entsprechen die Koeffizienten vor den $e^{-iN\chi}$-Faktoren Prozessen mit Elektronentransport nach links ($2 \to 1$). Jedes Energieniveau in den Metallen 1 und 2 kann maximal ein Elektron mit festem Spin (z.B. Spin auf) aufnehmen (da der Elektronentransport den Spin erhält, können wir uns zunächst auf eine Spinrichtung konzentrieren). Es gibt also für je ein festes Energieniveau auf jeder Seite des Kontakts genau 4 Möglichkeiten der Besetzung (n_1, n_2). Im Falle von (0,0) und (1,1) kann kein Elektronentransport stattfinden ($N = 0$). Im Falle von (1,0) oder (0,1) kann entweder ein Elektron mit der Wahrscheinlichkeit $\mathcal{T}$ transmittiert werden ($N = \pm 1$), oder es wird reflektiert (Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess $\mathcal{R}$, kein Ladungstransport, $N = 0$). Alles ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Elektronen in Leitern (n_1, n_2)	Besetzungswahrsch.	Wahrsch. des Streuprozesses	transportierte Ladung	$e^{iN\chi}$
$(0,0)$	$(1-f_1)(1-f_2)$	1	0	1
$(1,0)$	$f_1(1-f_2)$	$\mathcal{T}$	$+1$	$e^{i\chi}$
		$\mathcal{R}$	0	1
$(0,1)$	$(1-f_1)f_2$	$\mathcal{T}$	-1	$e^{-i\chi}$
		$\mathcal{R}$	0	1
$(1,1)$	$f_1 f_2$	1	0	1

1 Punkt

Als "check" muss die Zumme der Besetzungswahrscheinlichkeiten in Spalte 2 gleich 1 ergeben. Dies kann man verwenden, um die Terme für Φ_ϵ noch zusammenfassen, was auf

$$\Phi_\epsilon(\chi) = 1 + \mathcal{T}[e^{i\chi} - 1]f_1(1-f_2) + \mathcal{T}[e^{-i\chi} - 1]f_2(1-f_1)$$

führt.

b.)

$$C_1 = \frac{1}{i}\,\partial_\chi S(\chi)\big|_{\chi=0} = \frac{2\tau}{h}\int d\epsilon \mathcal{T}(f_1 - f_2) = \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV \qquad \Rightarrow \qquad \langle I\rangle = \frac{2e^2}{h}\mathcal{T}V \equiv gV$$

$$C_2 = -\,\partial_\chi^2 S(\chi)\big|_{\chi=0} = -\frac{2\tau}{h}\int d\epsilon\,\partial_\chi\left\{\frac{i\mathcal{T}\left[e^{i\chi}f_1(1-f_2) - e^{-i\chi}f_2(1-f_1)\right]}{\Phi_\epsilon(\chi)}\right\}\Bigg|_{\chi=0}$$

$$= \frac{2\tau}{h}\int d\epsilon\left\{\mathcal{T}\left[f_1(1-f_2) + f_2(1-f_1)\right] - T^2(f_1-f_2)^2\right\} \qquad (\text{da } \Phi_\epsilon(0) = 1)$$

Berechnung der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon f_1(1-f_2) + f_2(1-f_1) = eV\coth\frac{eV}{2k_BT} \qquad \leftarrow \qquad \left(\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon (f_1 - f_2)^2 = -2k_BT + eV\coth\frac{eV}{2k_BT}$$

Somit:

$$C_2 = \frac{2\tau}{h}\left[2\mathcal{T}^2 k_BT + \mathcal{T}(1-\mathcal{T})eV\coth\frac{eV}{2k_BT}\right]$$

$$\langle\langle I^2\rangle\rangle = \frac{2e^2}{h}\left[\mathcal{T}(1-\mathcal{T})eV\coth\frac{eV}{2k_BT} + 2\mathcal{T}^2 k_BT\right]$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$eV \ll k_BT: \quad \langle\langle I^2\rangle\rangle \approx \frac{2e^2}{h}\left[2k_BT\mathcal{T}(1-\mathcal{T}) + 2\mathcal{T}^2 k_BT\right] \approx \frac{2e^2}{h}2k_BT\mathcal{T} = \frac{4e^2}{h}\mathcal{T}\cdot k_BT \equiv 2gk_BT$$

$$eV \gg k_BT: \quad \langle\langle I^2\rangle\rangle \approx \frac{2e^2}{h}\quad [eV\mathcal{T}(1-\mathcal{T}) + 2\mathcal{T}^2 k_BT] \approx \frac{2e^2}{h}\underbrace{\mathcal{T}(1-\mathcal{T})}eV \equiv g\underbrace{\mathcal{R}}eV$$

Schottky-Rauschen unterdrückt durch Faktor $\mathcal{R} = 1-\mathcal{T}$ (Lesovik '89)

$\boxed{\text{2 Punkte}}$

c.)

$$T=0,\ eV>0: \quad f_1 = \begin{cases} 1 \text{ für } \epsilon < eV \\ 0 \text{ für } \epsilon > eV \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 1 \text{ für } \epsilon < 0 \\ 0 \text{ für } \epsilon > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_1f_2 = f_2, \quad (1-f_1)(1-f_2) = 1-f_1, \quad f_2(1-f_1) = 0$$

Es folgt, dass

$$\Phi_\epsilon(\chi) = 1 + \mathcal{T}\left(e^{i\chi}-1\right)$$

falls $0 \le \epsilon \le eV$, und $\Phi_\epsilon(\chi) = 1$ sonst. Unter Benutzung von $\ln 1 = 0$ erhalten wir

$$\Phi(\chi) = e^{S(\chi)} = \exp\left\{\frac{2\tau}{h}\int_0^{eV} d\epsilon \ln[1+\mathcal{T}(e^{i\chi}-1)]\right\} = \exp\left\{\frac{2\tau}{h}eV\ln\left[1+\mathcal{T}(e^{i\chi}-1)\right]\right\} = e^{M\ln[1+\mathcal{T}(e^{i\chi}-1)]}$$

(mit $M = 2\tau eV/h$) $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi(\chi) = \left[1+\mathcal{T}(e^{i\chi}-1)\right]^M}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\rho(N) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-iN\chi}\Phi(\chi) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-iN\chi}\underbrace{\left[1-\mathcal{T}+\mathcal{T}e^{i\chi}\right]^M}_{\sum_{n=0}^M\binom{M}{n}(1-\mathcal{T})^{M-n}(\mathcal{T}e^{i\chi})^n} = \sum_{n=0}^M\binom{M}{n}(1-\mathcal{T})^{M-n}\mathcal{T}^n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-i(N-n)\chi}}_{\delta_{nN}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(N) = \binom{M}{N}(1-\mathcal{T})^{M-N}\mathcal{T}^N}$$ Binomiale Zählstatistik $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$C_1 = \frac{1}{i}\,\partial_\chi S\big|_{\chi=0} = M\mathcal{T}$$

$$C_2 = -\,\partial_\chi^2 S\big|_{\chi=0} = M\mathcal{T}(1-\mathcal{T})$$

$$C_3 = M\mathcal{T}(1-\mathcal{T})(1-2\mathcal{T})$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

d.)

$\mathcal{T} \ll 1:$

$$\Phi_\epsilon(\chi) = 1 + \mathcal{T}\left[f_1(1-f_2)(e^{i\chi}-1) + f_2(1-f_1)(e^{-i\chi}-1)\right]$$

$$S_\epsilon(\chi) = \ln\left\{1+\mathcal{T}\left[f_1(1-f_2)(e^{i\chi}-1) + f_2(1-f_1)(e^{-i\chi}-1)\right]\right\} \approx \mathcal{T}\left[f_1(1-f_2)(e^{i\chi}-1) + f_2(1-f_1)(e^{-i\chi}-1)\right]$$

$$S(\chi) \approx \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}\int d\epsilon\left[f_1(1-f_2)(e^{i\chi}-1) + f_2(1-f_1)(e^{-i\chi}-1)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\int d\epsilon f_1(1-f_2) = eV\frac{e^{eV/k_BT}}{e^{eV/k_BT}-1}\\ \int d\epsilon f_2(1-f_1) = eV\frac{1}{e^{eV/k_BT}-1}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad S(\chi) \approx \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV\left[\frac{e^{eV/k_BT}(e^{i\chi}-1)+(e^{-i\chi}-1)}{e^{eV/k_BT}-1}\right]$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$

Kumulanten:

$$C_n = \frac{1}{i^n}\left.\frac{\partial^n S}{\partial\chi^n}\right|_{\chi=0} = \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV\frac{e^{eV/k_BT}-(-1)^n}{e^{eV/k_BT-1}} = \begin{cases}\frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV\coth\frac{eV}{2k_BT} & \text{für gerade } n\\ \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV & \text{für ungerade } n\end{cases}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\langle I\rangle = \frac{eC_1}{\tau} = \frac{2e^2}{h}\mathcal{T}V$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\langle\langle I^2\rangle\rangle = \frac{e^2C_2}{\tau} = \frac{2e^2}{h}\mathcal{T}eV\coth\frac{eV}{2k_BT} = e\langle I\rangle\coth\frac{eV}{2k_BT}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\langle\langle I^3\rangle\rangle = \frac{e^3C_3}{\tau} = \frac{2e^4}{h}\mathcal{T}V = e^2\langle I\rangle$$

$\langle\langle I^3\rangle\rangle/\langle I\rangle = e^2$ gut geeignet zur Messung der Tunnel-Ladung (keine Temperaturabhängigkeit) $\boxed{\text{1 Punkt}}$

e.)

$T=0,\ eV>0:$

$$S(\chi) = \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV(e^{i\chi}-1) := \bar{n}(e^{i\chi}-1), \qquad \text{mit } \bar{n} = \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV$$

$$\Phi(\chi) = e^{\bar{n}(e^{i\chi}-1)}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(Beachte: $\mathcal{T}\ll 1$, aber $\bar{n}$ nicht notwendig $\ll 1$!)

$$\rho(N) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-iN\chi}e^{\bar{n}(e^{i\chi}-1)} = e^{-\bar{n}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-iN\chi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\bar{n}e^{i\chi}\right)^n}{n!}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\rho(N) = e^{-\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{n!}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-iN\chi}e^{in\chi}}_{\delta_{Nn}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\rho(N) = e^{-\bar{n}}\frac{\bar{n}^N}{N!}}$ Poisson-Statistik mit $\bar{n} = \frac{2\tau}{h}\mathcal{T}eV$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Aufgabe 11 $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

$$\dot{\rho}_n = \sum_m(\rho_m W_{mn} - \rho_n W_{nm}), \qquad W_{n,n-1} = n\lambda$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\rho}_n = \rho_{n+1}(n+1)\lambda - \rho_n n\lambda}$, $\rho_n(0) = \delta_{nn_0}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

a.) $\underline{n=n_0}$:
$\dot{\rho}_{n_0} = -\rho_{n_0}n_0\lambda$ (da $\rho_n = 0$ für $n>n_0$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\rho_{n_0}(t) = e^{-n_0\lambda t}\rho_{n_0}(0) = e^{-n_0\lambda t}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b.) $\underline{n=n_0-1}$:
$\dot{\rho}_{n_0-1} = \rho_{n_0}n_0\lambda - \rho_{n_0-1}(n_0-1)\lambda$

$$\Rightarrow \quad \rho_{n_0-1}(t) = \underbrace{\rho_{n_0-1}(0)}_{=0}e^{-(n_0-1)\lambda t} + \int_0^t d\tau\rho_{n_0}(\tau)n_0\lambda e^{-(n_0-1)\lambda(t-\tau)} = n_0\lambda e^{-(n_0-1)\lambda t}\underbrace{\int_0^t d\tau e^{-\lambda\tau}}_{-\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda t}-1)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\rho_{n_0-1}(t) = n_0(e^{-\lambda t})^{n_0-1}(1-e^{-\lambda t})}$

c.) $\underline{n = n_0 - 2}$:
$\dot\rho_{n_0-2} = \rho_{n_0-1}(n_0-1)\lambda - \rho_{n_0-2}(n_0-2)\lambda$

$$\Rightarrow \quad \rho_{n_0-2}(t) = \int_0^t d\tau \rho_{n_0-1}(\tau)(n_0-1)\lambda e^{-(n_0-2)\lambda(t-\tau)} = n_0(n_0-1)\lambda e^{-(n_0-2)\lambda t}\int_0^t d\tau \underbrace{e^{-\lambda\tau}(1-e^{-i\lambda\tau})}_{\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{d\tau}(1-e^{-\lambda\tau})^2}$$

$$\rho_{n_0-2}(t) = \frac{n_0(n_0-1)}{2}(e^{-\lambda t})^{n_0-2}(1-e^{-\lambda t})^2$$

etc. $\Rightarrow$ $\boxed{\rho_n(t) = \binom{n_0}{n}(e^{-\lambda t})^n(1-e^{-\lambda t})^{n_0-n}}$ $(0 \le n \le n_0)$ Binominalverteilung $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Bew. durch Induktion: $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\dot\rho_{n-1} = \rho_n n\lambda - \rho_{n-1}(n-1)\lambda$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \rho_{n-1}(t) &= \int_0^t d\tau \rho_n(\tau) n\lambda \int_0^t d\tau \underbrace{e^{-\lambda\tau}(1-e^{-\lambda\tau})^{n_0-n}}_{\frac{1}{\lambda(n_0-n+1)}\frac{d}{d\tau}(1-e^{-\lambda\tau})^{n_0-n+1}} \\ &= \frac{n_0!n}{n!(n_0-n)!(n_0-n+1)!}e^{-(n-1)\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n_0-n+1} = \binom{n_0}{n-1}(e^{-\lambda t})^{n-1}(1-e^{-\lambda t})^{n_0-(n-1)}\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsvorschlag:
Mastergleichung (Notation $\rho_n(t) \equiv \rho(n,t)$ etc):

$$\frac{\partial\rho(n,t)}{\partial t} = (n+1)\lambda\rho(n+1,t) - n\lambda\rho(n,t)$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\rho(n,0) = \delta_{nn_0}$

Charakteristische Funktion:

$$\Phi(\chi,t) = \sum_n e^{in\chi}\rho(n,t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(\chi,t)}{\partial t} &= \sum_n e^{in\chi}\frac{\partial\rho(n,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\chi}\left[(n+1)\lambda\rho(n+1,t) - n\lambda\rho(n,t)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\chi}e^{-i\chi}(n+1)\lambda\rho(n+1,t) - \lambda\sum_{n=0}^{\infty} ne^{in\chi}\rho(n,t) \\ &= \frac{\lambda}{i}e^{-i\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\Phi(\chi,t) - \frac{\lambda}{i}\frac{\partial}{\partial\chi}\Phi(\chi,t) = -i\lambda\left(e^{-i\chi}-1\right)\frac{\partial}{\partial\chi}\Phi(\chi,t)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$

Lösung :

$$\Phi(\chi,t) = \left(1 + (e^{i\chi}-1)e^{-\lambda t}\right)^{n_0}$$

$$\rho(n,t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-in\chi}(1-e^{-\lambda t}+e^{i\chi}e{-\lambda t})^{n_0} = \sum_{m=0}^{n_0}\binom{n_0}{m}(1-e^{-\lambda t})^{n_0-m}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\chi}{2\pi}e^{-in\chi}e^{im\chi}}_{\delta_{nm}}e^{-\lambda mt}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(n,t) = \binom{n_0}{n}(1-e^{-\lambda t})^{n_0-n}(e^{-\lambda t})^n}$$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$